

FISICA QUANTISTICA I – PROVA SCRITTA DEL 29/06/2026

1. Si consideri una particella vincolata a muoversi in una dimensione e soggetta al potenziale di oscillatore armonico $V(X) = \frac{1}{2} m\omega^2 X^2$. Sia

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}} (|1\rangle + \lambda e^{i\phi}|3\rangle), \quad \lambda, \phi \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

lo stato della particella, con $|1\rangle$ e $|3\rangle$ primo e terzo stato eccitato dell'Hamiltoniana di oscillatore armonico.

Calcolare ΔX , ΔP e il prodotto $\Delta X \Delta P$, confrontando quest'ultimo con il limite fondamentale imposto dal principio di Heisenberg.

2. Si consideri una particella di massa m vincolata a muoversi in una dimensione sotto l'azione del potenziale

$$V(x) = -\alpha\delta(x), \quad \alpha \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Dato un fascio stazionario di particelle provenienti da sinistra con energia E , determinare in funzione di E la probabilità di trasmissione e la probabilità di riflessione. Per quale valore di E tali probabilità risultano uguali?

3. Si consideri un sistema fisico i cui stati occupano uno spazio di Hilbert di dimensione 3. Rispetto ad una base ortonormale $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$, un'osservabile A è rappresentata dalla matrice

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

e l'Hamiltoniana da

$$H = \frac{\hbar\omega}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix}.$$

(i) Se al tempo $t = 0$ lo stato del sistema è autostato di A corrispondente all'autovalore 0, si determini la probabilità che al tempo $t > 0$ la misura di A dia ancora il valore 0.

(ii) Si determini la probabilità dello stesso evento qualora si sia misurata l'energia in un istante τ con $0 < \tau < t$.

SOLUZIONI PROVA SCRITTA DEL 29/06/2026

1. Usando le relazioni

$$X = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (a + a^\dagger), \quad P = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} (a^\dagger - a) \quad (3)$$

vediamo subito che gli operatori X e P collegano soltanto stati con $\Delta n = \pm 1$, per cui

$$\langle X \rangle = \langle P \rangle = 0. \quad (4)$$

Usando

$$X^2 = \frac{\hbar}{2m\omega} (a^2 + a^{\dagger 2} + 2N + 1), \quad (5)$$

con N operatore numero, si ottiene

$$\langle n | X^2 | n \rangle = \frac{\hbar}{2m\omega} (2n + 1). \quad (6)$$

Pertanto

$$\langle 1 | X^2 | 1 \rangle = \frac{3\hbar}{2m\omega}, \quad \langle 3 | X^2 | 3 \rangle = \frac{7\hbar}{2m\omega}. \quad (7)$$

Per il termine non diagonale,

$$\langle 1 | a^2 | 3 \rangle = \sqrt{3 \cdot 2} = \sqrt{6}, \quad (8)$$

mentre

$$\langle 1 | a^{\dagger 2} | 3 \rangle = 0. \quad (9)$$

Quindi

$$\langle 1 | X^2 | 3 \rangle = \frac{\hbar}{2m\omega} \sqrt{6}. \quad (10)$$

Segue

$$\langle X^2 \rangle = \frac{\hbar}{2m\omega} \frac{3 + 7\lambda^2 + 2\sqrt{6} \lambda \cos \phi}{1 + \lambda^2}. \quad (11)$$

Poiché $\langle X \rangle = 0$, $(\Delta X)^2 = \langle X^2 \rangle$. In modo analogo otteniamo

$$P^2 = -\frac{m\hbar\omega}{2} (a^2 + a^{\dagger 2} - 2N - 1), \quad (12)$$

da cui

$$\langle 1 | P^2 | 1 \rangle = \frac{3m\hbar\omega}{2}, \quad \langle 3 | P^2 | 3 \rangle = \frac{7m\hbar\omega}{2}, \quad (13)$$

e

$$\langle 1 | P^2 | 3 \rangle = -\frac{m\hbar\omega}{2} \sqrt{6}. \quad (14)$$

Pertanto

$$\langle P^2 \rangle = \frac{m\hbar\omega}{2} \frac{3 + 7\lambda^2 - 2\sqrt{6} \lambda \cos \phi}{1 + \lambda^2}. \quad (15)$$

Poiché $\langle P \rangle = 0$, $(\Delta P)^2 = \langle P^2 \rangle$. Infine

$$\Delta X \Delta P = \frac{\hbar}{2} \frac{\sqrt{(3 + 7\lambda^2)^2 - 24\lambda^2 \cos^2 \phi}}{1 + \lambda^2}. \quad (16)$$

Si verifica facilmente che

$$\Delta X \Delta P > \frac{\hbar}{2}, \quad (17)$$

in accordo con il principio di indeterminazione di Heisenberg.

2. Le probabilità di riflessione e trasmissione sono date (sotto la condizione $E > 0$) da

$$R = \frac{1}{1 + (2\hbar^2 E / m\alpha^2)}, \quad T = \frac{1}{1 + (m\alpha^2 / 2\hbar^2 E)}. \quad (18)$$

Tali probabilità risultano uguali quando

$$E = \frac{m\alpha^2}{2\hbar^2}. \quad (19)$$

3. (i) Gli autovalori dell'osservabile A sono

$$a_0 = 0, \quad a_{\pm} = \pm 1,$$

con autovettori normalizzati

$$|a_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad |a_+\rangle = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |a_-\rangle = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Poiché al tempo $t = 0$ il sistema si trova nell'autostato di A corrispondente all'autovalore nullo,

$$|\psi(0)\rangle = |a_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Determiniamo ora gli autovalori e gli autostati dell'Hamiltoniana. Si trova

$$E_0 = 0, \quad E_{\pm} = \pm \hbar\omega,$$

con autovettori normalizzati

$$|E_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$|E_+\rangle = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -i\sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}, \quad |E_-\rangle = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ i\sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Lo stato iniziale può essere scritto come

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|E_+\rangle + |E_-\rangle).$$

L'evoluzione temporale è quindi

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{-i\omega t}|E_+\rangle + e^{i\omega t}|E_-\rangle),$$

ossia

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ -\sqrt{2} \sin(\omega t) \\ -\cos(\omega t) \end{pmatrix}.$$

La probabilità che una misura di A restituisca ancora il valore 0 è

$$P_{A=0}(t) = |\langle a_0|\psi(t)\rangle|^2 = \cos^2(\omega t).$$

(ii) Supponiamo ora di effettuare una misura dell'energia all'istante intermedio τ , con $0 < \tau < t$. Lo stato iniziale contiene solo le componenti $|E_+\rangle$ e $|E_-\rangle$, ciascuna con probabilità

$$P(E_+) = P(E_-) = \frac{1}{2}.$$

Dopo la misura il sistema collassa in uno dei due autostati dell'energia e, poiché tali stati sono stazionari, la successiva evoluzione modifica soltanto una fase globale. La probabilità di ottenere successivamente il valore $A = 0$ è quindi

$$P_{A=0}(t) = \frac{1}{2} |\langle a_0|E_+\rangle|^2 + \frac{1}{2} |\langle a_0|E_-\rangle|^2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$