FISICA QUANTISTICA II – PROVA SCRITTA DEL 04/04/2024

1. Data una particella quantistica di massa $m = 1$ (in opportune unità adimensionali), che si muove in uno spazio tridimensionale, si considerino le osservabili

$$Q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(X + P_y)\,, \quad P_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(P_x - Y)\,,$$

$$Q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(X - P_y)\,, \quad P_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(P_x + Y)\,. \tag{1}$$

(i) Calcolare le relazioni di commutazione $[Q_i, P_j]$ $(i, j = 1, 2)$.
(ii) Esprimere L_z in funzione di Q_1, Q_2, P_1, P_2 e spiegare perché l'espressione ottenuta implica che gli autovalori di L_z sono dati da $m\hbar$, con m intero.

2. Si consideri un oscillatore armonico unidimensionale, descritto dall' hamiltoniana

$$H_0 = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}\,m\omega^2 X^2. \tag{2}$$

Si consideri ora la correzione relativistica all'energia cinetica,

$$H = H_0 + W, \quad W = -\frac{P^4}{8m^3c^2}, \tag{3}$$

con c velocità della luce nel vuoto.

Si determini mediante la teoria delle perturbazioni la correzione ai livelli energetici del sistema, fermandosi all'ordine perturbativo più basso che dà risultato non nullo.

SOLUZIONI PROVA SCRITTA DEL 04/04/2024

1. i) Usando le relazioni di commutazione canoniche tra X, Y, P_x e P_y otteniamo

$$[Q_1, Q_2] = [P_1, P_2] = 0, \quad [Q_i, P_j] = i\hbar\delta_{ij}, \ (i, j = 1, 2). \tag{4}$$

(ii) Abbiamo

$$Q_1^2 - Q_2^2 = 2XP_y, \quad P_1^2 - P_2^2 = -2YP_x. \tag{5}$$

Quindi

$$L_z = XP_y - YP_x = \frac{1}{2}(Q_1^2 - Q_2^2) + \frac{1}{2}(P_1^2 - P_2^2), \tag{6}$$

che è la differenza delle hamiltoniane di due oscillatori armonici di massa e frequenza unitarie (in opportune unità adimensionali). Siccome le due hamiltoniane hanno autovalori $\hbar(n_1 + 1/2)$ e $\hbar(n_2 + 1/2)$ $(n_1, n_2 = 0, 1, ...)$, la loro differenza dà gli autovalori di L_z, vale a dire $m\hbar$, con $m = n_1 - n_2$ intero.

2. Usando gli operatori di creazione e distruzione otteniamo

$$P = -i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}(a - a^\dagger), \quad P^2 = -\frac{m\hbar\omega}{2}\left[a^2 + (a^\dagger)^2 - 2N - 1\right]. \tag{7}$$

dove $N = a^\dagger a$ è l'operatore numero. Usando

$$\langle n|P^4|n\rangle = ||P^2|n\rangle||^2, \tag{8}$$

otteniamo la correzione al prim'ordine del livello energetico n-esimo:

$$E_n^{(1)} = -\frac{1}{8m^3c^2}\langle n|P^4|n\rangle = -\frac{3\hbar^2\omega^2}{32mc^2}(2n^2 + 2n + 1). \tag{9}$$