FISICA QUANTISTICA II – PROVA SCRITTA DEL 04/09/2023

1. (i) Costruire per una particella a spin 3/2 la rappresentazione matriciale degli operatori di spin S_x e S_y rispetto alla base degli autostati di S_z.
   (ii) Calcolare esplicitamente gli autovalori di S_x e verificarne la consistenza con le predizioni dalla teoria generale del momento angolare.

2. Una particella di massa m si muove in una dimensione sotto l'azione di un potenziale armonico e di una debole forza anarmonica descritta dal potenziale W:

$$H = H_0 + W, \quad H_0 = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 X^2, \quad W = \lambda \sin(\kappa X). \tag{1}$$

   (i) Calcolare l'energia dello stato fondamentale al second'ordine della teoria delle perturbazioni.
   (ii) Calcolare lo stato fondamentale al prim'ordine della teoria delle perturbazioni.
   Si ricorda che

$$e^{A+B} = e^A e^B e^{-[A,B]/2}. \tag{2}$$

SOLUZIONI PROVA SCRITTA DEL 04/09/2023

1. (i) Usiamo le relazioni

$$S_\pm|s,m\rangle = \hbar\sqrt{s(s+1)-m(m\pm 1)}|s,m\pm 1\rangle, \tag{3}$$

ottenendo, per $s = 3/2$,

$$S_+ = \hbar \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_- = S_+^\dagger. \tag{4}$$

Abbiamo quindi

$$S_x = \frac{S_+ + S_-}{2} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

$$S_y = \frac{S_+ - S_-}{2i} = \frac{\hbar}{2i} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ -\sqrt{3} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

(ii) Mediante calcolo diretto troviamo che, come atteso, S_x ha gli stessi autovalori di S_z, vale a dire $\pm 3\hbar/2$, $\pm\hbar/2$.

2. (i) Gli elementi di matrice da valutare nei primi ordini dello sviluppo perturbativo sono

$$^{(0)}\langle n|W|0\rangle^{(0)} = \lambda\ ^{(0)}\langle n|\sin(\kappa X)|0\rangle^{(0)}, \tag{7}$$

con $|n\rangle^{(0)}$ autostati di H_0. Va quindi valutata la parte immaginaria di

$$^{(0)}\langle n|e^{i\kappa X}|0\rangle^{(0)} = {}^{(0)}\langle n|\exp\left[i\kappa\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,(a+a^\dagger)\right]|0\rangle^{(0)}. \tag{8}$$

Usando l'identità operatoriale riportata nel testo dell'esercizio, con $A = i\kappa\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}a^\dagger$ e $B = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}a$, otteniamo

$$\begin{aligned}
^{(0)}\langle n|e^{i\kappa X}|0\rangle^{(0)} &= {}^{(0)}\langle n|\exp\left(i\kappa\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,a^\dagger\right)\exp\left(i\kappa\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,a\right)|0\rangle^{(0)}e^{-\hbar\kappa^2/4m\omega} \\
&= {}^{(0)}\langle n|\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\left(i\kappa\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\right)^m (a^\dagger)^m|0\rangle^{(0)}e^{-\hbar\kappa^2/4m\omega} \\
&= \frac{1}{\sqrt{n!}}\left(i\kappa\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\right)^n e^{-\hbar\kappa^2/4m\omega}.
\end{aligned} \tag{9}$$

La correzione al primo ordine dell'energia dello stato fondamentale è data da

$$E_0^{(1)} = \lambda \; {}^{(0)}\langle 0|\sin(\kappa X)|0\rangle^{(0)}, \tag{10}$$

mentre la correzione al secondo ordine è data da

$$E_0^{(2)} = -\frac{\lambda}{\hbar\omega}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\,|{}^{(0)}\langle n|\sin(\kappa X)|0\rangle^{(0)}|^2. \tag{11}$$

(ii) La correzione al primo ordine per lo stato fondamentale è data da

$$|0\rangle^{(1)} = -\frac{\lambda}{\hbar\omega}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\,{}^{(0)}\langle n|\sin(\kappa X)|0\rangle^{(0)}|n\rangle^{(0)}. \tag{12}$$