FISICA QUANTISTICA II – PROVA SCRITTA DEL 06/09/2022

1. Si considerino due spin, $S_1 = 1$ e $S_2 = \frac{1}{2}$. Si derivi la trasformazione che permette di passare dalla base $\{|S_1, S_2; S_{1z}, S_{2z}\rangle\}$ alla base $\{|J, M\rangle\}$, con $\vec{J} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$ e $M = S_{1z} + S_{2z}$.

2. Una particella si muove in una buca di potenziale

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } -\frac{L}{2} \leq x \leq \frac{L}{2}, \\ +\infty & \text{altrimenti}, \end{cases} \tag{1}$$

   con l'aggiunta della perturbazione

$$W = \epsilon \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right). \tag{2}$$

   Calcolare l'energia dello stato fondamentale al secondo ordine della teoria delle perturbazioni e lo stato fondamentale al primo ordine.

SOLUZIONI PROVA SCRITTA DEL 06/09/2022

1. Lo spazio di Hilbert complessivo dei due spin ha dimensione 6, e i sottospazio corrispondenti a $J = \frac{3}{2}$ e $J = \frac{1}{2}$ hanno rispettivamente dimensione 4 e 2.

   Cominciamo con l'identificare

$$|\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\rangle = |1, \frac{1}{2}; 1, \frac{1}{2}\rangle. \tag{3}$$

   Applichiamo poi J_- al primo membro di questa uguaglianza. Usando la relazione

$$J_-|J, M\rangle = \sqrt{J(J+1) - M(M-1)}|J, M-1\rangle \tag{4}$$

   otteniamo

$$J_-|\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\rangle = \sqrt{3}|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle. \tag{5}$$

   Applicando poi $J_- = S_{1-} + S_{2-}$ al secondo membro della (3) otteniamo

$$(S_{1-} + S_{2-})|1, \frac{1}{2}; 1, \frac{1}{2}\rangle = \sqrt{2}|1, \frac{1}{2}; 0, \frac{1}{2}\rangle + |1, \frac{1}{2}; 1, -\frac{1}{2}\rangle \tag{6}$$

   e quindi

$$|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}|1, \frac{1}{2}; 0, \frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}|1, \frac{1}{2}; 1, -\frac{1}{2}\rangle. \tag{7}$$

   Applicando quindi ripetutamente $J_- = S_{1-} + S_{2-}$ otteniamo

$$|\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}|1, \frac{1}{2}; -1, \frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|1, \frac{1}{2}; 0, -\frac{1}{2}\rangle, \tag{8}$$

$$|\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\rangle = |1, \frac{1}{2}; -1, -\frac{1}{2}\rangle. \tag{9}$$

   Per ottenere $|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$, lo scriviamo come combinazione lineare dei vettori con $S_{1z} + S_{2z} = \frac{1}{2}$,

$$|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle = \alpha|1, \frac{1}{2}; 0, \frac{1}{2}\rangle + \beta|1, \frac{1}{2}; 1, -\frac{1}{2}\rangle \tag{10}$$

   e imponiamo l'ortogonalità al vettore $|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle$ determinato in precedenza. Scegliendo $\alpha > 0$ e normalizzando lo stato $|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$ otteniamo

$$|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}|1, \frac{1}{2}; 0, \frac{1}{2}\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}|1, \frac{1}{2}; 1, -\frac{1}{2}\rangle. \tag{11}$$

   Applicando infine $J_- = S_{1-} + S_{2-}$ ad ambo i membri di questa relazione otteniamo

$$|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}|1, \frac{1}{2}; -1, \frac{1}{2}\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}}|1, \frac{1}{2}; 0, -\frac{1}{2}\rangle. \tag{12}$$

2. Le autofunzioni imperturbate sono date da

$$\phi_n^{(0)}(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) & \text{se } n \text{ dispari,} \\ \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) & \text{se } n \text{ pari,} \end{cases} \tag{13}$$

gli autovalori da

$$E_n^{(0)} = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}\, n^2, \quad n = 1, 2, 3, \ldots . \tag{14}$$

Per l'energia dello stato fondamentale, la correzione al primo ordine,

$$E_1^{(1)} = {}^{(0)}\langle\phi_1|W|\phi_1\rangle^{(0)} \tag{15}$$

si annulla in quanto $|\phi_1^{(0)}(x)|^2$ è pari e la perturbazione W dispari. La correzione al secondo ordine

$$E_1^{(2)} = \sum_{k\neq 1} \frac{|{}^{(0)}\langle\phi_k|W|\phi_1\rangle^{(0)}|^2}{E_1^{(0)} - E_k^{(0)}} = -\frac{\epsilon^2}{12}\, E_1^{(0)}, \tag{16}$$

dove abbiamo usato il fatto che in ${}^{(0)}\langle\phi_k|W|\phi_1\rangle^{(0)}$ solo il termine per $k = 2$ contribuisce, in quanto $W|\phi_1\rangle^{(0)} \propto |\phi_2\rangle^{(0)}$.

Per quanto riguarda lo stato fondamentale, si trova analogamente la correzione al primo ordine

$$|\phi_1\rangle^{(1)} = \sum_{k\neq 1} \frac{{}^{(0)}\langle\phi_k|W|\phi_1\rangle^{(0)}}{E_1^{(0)} - E_k^{(0)}} |\phi_k\rangle^{(0)} = -\frac{\epsilon}{6}|\phi_2\rangle^{(0)}. \tag{17}$$