FISICA QUANTISTICA II – PROVA SCRITTA DEL 06/11/2023

1. Si consideri un sistema composto da due particelle a spin 1/2. L'hamiltoniano del sistema ha la forma
$$H = \omega_1 S_{1z} + \omega_2 S_{2z}, \tag{1}$$
dove S_{1z} e S_{2z} sono le proiezioni degli spin $\mathbf{S}_1$ e $\mathbf{S}_2$ delle due particelle sull'asse z, con ω_1 e ω_2 costanti reali. Lo stato iniziale del sistema al tempo $t = 0$ è
$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle + |-+\rangle). \tag{2}$$
(i) Determinare lo stato $|\psi(t)\rangle$ del sistema ad un generico tempo t.
(ii) Al tempo t viene misurata l'osservabile $S^2 = (\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2)^2$. Quali sono i possibili valori di tale misura e con quali probabilità vengono ottenuti?

2. Una particella di massa m si muove in una dimensione sotto l'azione dell'hamiltoniana
$$H = H_0 + W, \quad H_0 = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 X^2, \quad W = \epsilon X^3. \tag{3}$$
Si determinino mediante la teoria delle perturbazioni gli autovalori di H fino all'ordine ϵ^2 e gli autovettori fino all'ordine ϵ.

SOLUZIONI PROVA SCRITTA DEL 06/11/2023

1. (i) L'Hamiloniana è diagonale nella base $\{|++\rangle, |+-\rangle, |-+\rangle, |--\rangle\}$:

$$H = \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} \omega_1 + \omega_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_1 - \omega_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega_1 + \omega_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_1 - \omega_2 \end{bmatrix} . \tag{4}$$

Quindi

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{-i\omega t} |+-\rangle + e^{i\omega t} |-+\rangle \right), \tag{5}$$

con $\omega \equiv (\omega_1 - \omega_2)/2$.

(ii) Indicando con $|SM\rangle$ gli autovalori comuni di S^2 e di S_z abbiamo

$$|+-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle + |00\rangle), \quad |-+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle - |00\rangle), \tag{6}$$

da cui

$$|\psi(t)\rangle = \cos(\omega t)|10\rangle + i\sin(\omega t)|00\rangle, \tag{7}$$

il che implica che $p(S^2 = 2\hbar^2) = \cos^2(\omega t)$ e $p(S^2 = 0) = \sin^2(\omega t)$.

2. Chiamiamo $\{|n\rangle^{(0)}\}$ la base degli autostati imperturbati, corrispondenti agli autovalori imperturbati $E_n^{(0)} = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$ dell'oscillatore armonico. Esprimendo X in funzione degli operatori di creazione e di distruzione otteniamo

$$^{(0)}\langle k|W|n\rangle^{(0)} = \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^{\frac{3}{2}} {}^{(0)}\langle k|(a + a^\dagger)|n\rangle^{(0)}$$

$$= \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\sqrt{n(n-1)(n-2)}\delta_{k,n-3} + 3\sqrt{n^3}\delta_{k,n-1} \right.$$

$$\left. +3\sqrt{(n+1)^3}\delta_{k,n+1} + \sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)}\delta_{k,n+3} \right). \tag{8}$$

Vediamo quindi che la correzione al primo ordine agli autovalori imperturbati è nulla:

$$E_n^{(1)} = {}^{(0)}\langle n|W|n\rangle^{(0)} = 0, \tag{9}$$

mentre la correzione al secondo ordine è data da

$$E_n^{(2)} = \sum_{k \neq n} \frac{|{}^{(0)}\langle k|W|n\rangle^{(0)}|^2}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}} = -\frac{\hbar^2 \epsilon^2}{8m^3\omega^4} (30n^2 + 30n + 11). \tag{10}$$

La correzione al primo ordine per gli autostati è data da

$$|n\rangle^{(1)} = \sum_{k \neq n} \frac{^{(0)}\langle k|W|n\rangle^{(0)}}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}} |k\rangle^{(0)} = \frac{\epsilon \hbar^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{3}{2}} 3 m^{\frac{3}{2}} \omega^{\frac{5}{2}}} \left(\sqrt{n(n-1)(n-2)}|n-3\rangle^{(0)} \right.$$

$$\left. +9\sqrt{n^3}|n-1\rangle^{(0)} - 9\sqrt{(n+1)^3}|n+1\rangle^{(0)} - \sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)}|n+3\rangle^{(0)} \right). \tag{11}$$