FISICA QUANTISTICA II – PROVA SCRITTA DEL 07/12/2022

1. Dato uno stato $|\psi\rangle$ autostato simultaneo di L^2 e L_z, corrispondente agli autovalori $l(l+1)\hbar^2$ e $m\hbar$, calcolare:
(i) $\langle L_x\rangle$, $\langle L_y\rangle$ e le deviazioni standard Δ_{L_x} e Δ_{L_y}.
(ii) verificare che il valore del prodotto $\Delta_{L_x}\Delta_{L_y}$ è in accordo con il principio di indeterminazione.

2. Una particella di massa M si muove in tre dimensioni sotto l'azione di un potenziale armonico e di un potenziale W:

$$H = H_0 + W, \quad H_0 = \frac{\vec{P}^2}{2M} + \frac{1}{2}\, M\omega^2 \vec{R}^2, \quad W = -\frac{(\vec{P}^2)^2}{8M^3c^2}, \tag{1}$$

dove $\vec{R} = (X, Y, Z)$, $\vec{P} = (P_x, P_y, P_z)$, $\vec{R}^2 = \vec{R}\cdot\vec{R}$ e analogamente per $\vec{P}^2$. Calcolare al prim'ordine della teoria delle perturbazioni la correzione all'energia dello stato fondamentale dovuta a W.

SOLUZIONI PROVA SCRITTA DEL 07/12/2022

1. (i) Usando $[L_i, L_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}L_k$, otteniamo
$$\langle L_x\rangle = \frac{1}{i\hbar}\langle[L_y, L_z]\rangle = \frac{1}{i\hbar}\langle(L_yL_z - L_zL_y)\rangle = \frac{m}{i}(\langle L_y\rangle - \langle L_y\rangle) = 0. \tag{2}$$
Analogamente si dimostra $\langle L_y\rangle = 0$.
(ii) Dala la simmetria rispetto all'asse z ($|\psi\rangle$ è autostato di L_z oltre che di L^2) abbiamo
$$\langle L_x^2\rangle = \langle L_y^2\rangle = \frac{1}{2}\langle(L^2 - L_z^2)\rangle = \frac{[l(l+1) - m^2]\hbar^2}{2}. \tag{3}$$
e quindi
$$\Delta_{L_x} = \Delta_{L_y} = \sqrt{\frac{[l(l+1) - m^2]\hbar^2}{2}}. \tag{4}$$
Dal teorema di Robertson,
$$\Delta_{L_x}\Delta_{L_y} \geq \frac{1}{2}|\langle[L_x, L_y]\rangle| = \frac{\hbar}{2}|\langle L_z\rangle| = \frac{\hbar^2|m|}{2}. \tag{5}$$
Per lo stato $|\psi\rangle$ assegnato,
$$\Delta_{L_x}\Delta_{L_y} = \frac{[l(l+1) - m^2]\hbar^2}{2}, \tag{6}$$
che è sempre maggiore od uguale al limite inferiore stabilito dal teorema di Robertson, che viene saturato solo per $m = \pm l$.

2. Scriviamo $H_0 = H_{0x} + H_{0y} + H_{0z}$, con $H_{0\alpha}$ Hamiltoniana di oscillatore armonico unidimensionale lungo l'asse α ($\alpha = x, y, z$). Indichiamo gli autostati di H_0 come $|n_xn_yn_z\rangle$, cone n_α autovalore dell'operatore numero per H_α. Lo stato fondamentale $|000\rangle$ corrisponde all'energia $E_{000}^{(0)} = \frac{3}{2}\hbar\omega$. La correzione al prim'ordine dell'energia dello stato fondamentale è data da
$$E_{000}^{(1)} = \langle 000|W|000\rangle. \tag{7}$$
Per simmetria sferica dello stato $|000\rangle$ abbiamo
$$\langle 000|P_x^4|000\rangle = \langle 000|P_y^4|000\rangle = \langle 000|P_z^4|000\rangle, \tag{8}$$
$$\langle 000|P_x^2|000\rangle = \langle 000|P_y^2|000\rangle = \langle 000|P_z^2|000\rangle. \tag{9}$$
Quindi
$$\begin{aligned}\langle 000|(\vec{P}^2)^2|000\rangle &= \langle 000|3P_x^4 + 6P_x^2P_y^2|000\rangle \\ &= 3\left(\frac{M\hbar\omega}{2}\right)^2\langle 000|(a_x^\dagger - a_x)^4 + 2(a_x^\dagger - a_x)^2(a_y^\dagger - a_y)^2|000\rangle,\end{aligned} \tag{10}$$
dove abbiamo usato
$$P_x = i\sqrt{\frac{M\hbar\omega}{2}}(a_x^\dagger - a_x), \quad P_y = i\sqrt{\frac{M\hbar\omega}{2}}(a_y^\dagger - a_y). \tag{11}$$
Usando le proprietà degli operatori di creazione e distruzione otteniamo
$$\langle 000|(a_x^\dagger - a_x)^4 + 2(a_x^\dagger - a_x)^2(a_y^\dagger - a_y)^2|000\rangle = \langle 000|2a_x^2(a_x^\dagger)^2 + a_xa_x^\dagger|000\rangle = 5, \tag{12}$$
e quindi
$$E_{000}^{(1)} = -\frac{15\hbar^2\omega^2}{32Mc^2} = -\frac{5\hbar\omega}{16Mc^2}\,E_{000}^{(0)}. \tag{13}$$