

FISICA QUANTISTICA II – PROVA SCRITTA DEL 09/09/2024

1. Si consideri una particella con numero quantico di spin $s = 1$, soggetta ad un campo magnetico $\mathbf{B} = (B, 0, 0)$. Si trascurino i gradi di libertà orbitali della particella e sia l'operatore hamiltoniano per il sistema $H = g\mathbf{B} \cdot \mathbf{S} = gBS_x$.
 - (i) Usando le proprietà degli operatori S_+ e S_- scrivere la matrice S_x nella base $\{|11\rangle, |10\rangle, |1-1\rangle\}$ degli autostati simultanei di S^2 e S_z .
 - (ii) Sia la particella al tempo $t = 0$ preparata nello stato $|\psi(0)\rangle = |1-1\rangle$. Trovare lo stato $|\psi(t)\rangle$ ad ogni tempo $t > 0$.
 - (iii) Trovare la probabilità di misurare $S_z = -\hbar$ in funzione del tempo t (per $t \geq 0$).
2. Una particella di massa m si muove in tre dimensioni sotto l'azione dell'hamiltoniana

$$H = H_0 + W, \quad H_0 = \frac{1}{2m} (P_x^2 + P_y^2 + P_z^2) + \frac{1}{2} m\omega^2 (X^2 + Y^2 + Z^2), \quad W = \frac{\epsilon}{2} m\omega^2 XY, \quad (1)$$

con $\epsilon \ll 1$.

- (i) Si determini l'energia dello stato fondamentale del sistema al secondo ordine della teoria delle perturbazioni.
- (ii) Si determinino le energie dei primi tre stati eccitati al primo ordine della teoria delle perturbazioni.

SOLUZIONI PROVA SCRITTA DEL 09/09/2024

1. (i) Usando $S_+|10\rangle = \sqrt{2}\hbar|11\rangle$, $S_+|1-1\rangle = \sqrt{2}\hbar|10\rangle$, $S_-|11\rangle = \sqrt{2}\hbar|10\rangle$, $S_-|10\rangle = \sqrt{2}\hbar|1-1\rangle$, otteniamo

$$S_+ = \sqrt{2}\hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_- = \sqrt{2}\hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

e quindi

$$S_x = \frac{1}{2}(S_+ + S_-) = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

- (ii) Gli autovalori di S_x valgono $+\hbar, 0, -\hbar$ e i corrispondenti autovettori sono dati da

$$|+\rangle = \frac{1}{2}(|11\rangle + \sqrt{2}|10\rangle + |1-1\rangle), \quad (4)$$

$$|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|11\rangle - |1-1\rangle), \quad (5)$$

$$|-\rangle = \frac{1}{2}(|11\rangle - \sqrt{2}|10\rangle + |1-1\rangle). \quad (6)$$

Invertendo queste relazioni troviamo in particolare

$$|1-1\rangle = \frac{1}{2}(|+\rangle - \sqrt{2}|0\rangle + |-\rangle). \quad (7)$$

Quindi

$$|\psi(t)\rangle = e^{-igBS_x t/\hbar}|1-1\rangle = \frac{1}{2} \left(e^{-igBt}|+\rangle - \sqrt{2}|0\rangle + e^{igBt}|-\rangle \right). \quad (8)$$

- (iii) Tornando alla base degli autostati di S_z possiamo scrivere

$$|\psi(t)\rangle = -\sin^2(gBt/2)|11\rangle - i\sqrt{2}\sin(gBt/2)\cos(gBt/2)|10\rangle + \cos^2(gBt/2)|1-1\rangle \quad (9)$$

e quindi

$$p(S_z = -\hbar, t) = |\langle 1-1|\psi(t)\rangle|^2 = \cos^4(gBt/2). \quad (10)$$

2. Conviene usare gli operatori di creazione e distruzione, mediante i quali si ha

$$X = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a_x + a_x^\dagger), \quad a_x|n_x\rangle = \sqrt{n_x}|n_x-1\rangle, \quad a_x^\dagger|n_x\rangle = \sqrt{n_x+1}|n_x+1\rangle, \quad (11)$$

$$Y = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a_y + a_y^\dagger), \quad a_y|n_y\rangle = \sqrt{n_y}|n_y-1\rangle, \quad a_y^\dagger|n_y\rangle = \sqrt{n_y+1}|n_y+1\rangle. \quad (12)$$

- (i) Lo stato fondamentale $|n_x=0, n_y=0, n_z=0\rangle \equiv |0,0,0\rangle$ di H_0 corrisponde all'energia $E_0^{(0)} = \frac{3}{2}\hbar\omega$. La correzione al primo ordine a tale energia si annulla in quanto

$$E_0^{(1)} = \langle 0,0,0|W|0,0,0\rangle = 0. \quad (13)$$

Siccome

$$\langle 0, 0, 0 | W | n_x, n_y, n_z \rangle = \frac{\epsilon}{2} m \omega^2 \langle 0, 0, 0 | XY | n_x, n_y, n_z \rangle = \frac{\epsilon}{4} \hbar \omega \delta_{n_x,1} \delta_{n_y,1} \delta_{n_z,0}, \quad (14)$$

otteniamo la correzione al secondo ordine:

$$E_0^{(2)} = \frac{|\langle 1, 1, 0 | W | 0, 0, 0 \rangle|^2}{-2\hbar\omega} = -\frac{\epsilon^2}{32} \hbar\omega. \quad (15)$$

(ii) Il primo livello eccitato di H_0 , $E_1^{(0)} = \frac{5}{2} \hbar\omega$, è tre volte degenere, con base per il corrispondente autospazio data dagli stati $|1, 0, 0\rangle$, $|0, 1, 0\rangle$ e $|0, 0, 1\rangle$. Diagonalizzando W in tale autospazio,

$$W = \frac{\epsilon}{4} \hbar\omega \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (16)$$

otteniamo gli autovalori 0 e $\pm \frac{\epsilon}{4} \hbar\omega$. Quindi il primo livello eccitato imperturbato si apre a causa della perturbazione in tre livelli, corrispondenti alle energie

$$\left(\frac{5}{2} - \frac{\epsilon}{4}\right) \hbar\omega, \quad \frac{5}{2} \hbar\omega, \quad \left(\frac{5}{2} + \frac{\epsilon}{4}\right) \hbar\omega. \quad (17)$$