FISICA QUANTISTICA II – PROVA SCRITTA DEL 09/11/2021

1. Data una particella quantistica di massa $m = 1$ (in opportune unità adimensionali), che si muove in uno spazio tridimensionale, si considerino le osservabili

$$Q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(X + P_y)\,, \quad P_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(P_x - Y)\,,$$

$$Q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(X - P_y)\,, \quad P_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(P_x + Y)\,. \tag{1}$$

(i) Calcolare le relazioni di commutazione $[Q_i, P_j]$ $(i, j = 1, 2)$.
(ii) Esprimere L_z in funzione di Q_1, Q_2, P_1, P_2 e spiegare perché l'espressione ottenuta implica che gli autovalori di L_z sono dati da $m\hbar$, con m intero.

2. Si consideri un sistema quantistico a due livelli soggetto ad un campo magnetico statico uniforme. L'hamiltoniana del sistema è data da

$$H = -\mu \vec{B} \cdot \vec{\sigma}, \tag{2}$$

con $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ e $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ matrici di Pauli. Sia il campo magnetico diretto nel piano xz, $\vec{B} = (B_x, 0, B_z)$. Si assuma inoltre

$$\epsilon \equiv \frac{B_x}{B_z} \ll 1. \tag{3}$$

(i) Si determinino mediante la teoria delle perturbazioni gli autovalori di H fino all'ordine ϵ^2 e gli autovettori fino all'ordine ϵ.
(ii) Confrontare i risultati approssimati ottenuti con la soluzione esatta per gli autovalori e gli autovettori.

SOLUZIONI PROVA SCRITTA DEL 09/11/2021

1. i) Usando le relazioni di commutazione canoniche tra X, Y, P_x e P_y otteniamo

$$[Q_1, Q_2] = [P_1, P_2] = 0, \quad [Q_i, P_j] = i\hbar\delta_{ij},\ (i, j = 1, 2). \tag{4}$$

(ii) Abbiamo

$$Q_1^2 - Q_2^2 = 2XP_y, \quad P_1^2 - P_2^2 = -2YP_x. \tag{5}$$

Quindi

$$L_z = XP_y - YP_x = \frac{1}{2}(Q_1^2 - Q_2^2) + \frac{1}{2}(P_1^2 - P_2^2), \tag{6}$$

che è la differenza delle hamiltoniane di due oscillatori armonici di massa e frequenza unitarie (in opportune unità adimensionali). Siccome le due hamiltoniane hanno autovalori $\hbar(n_1 + 1/2)$ e $\hbar(n_2 + 1/2)$ $(n_1, n_2 = 0, 1, ...)$, la loro differenza dà gli autovalori di L_z, vale a dire $m\hbar$, con $m = n_1 - n_2$ intero.

2. (i) Sia $H = H_0 + W$, dove $H_0 = -\mu B_z \sigma_z$ e $H_1 = -\epsilon\mu B_z \sigma_x$. Gli autovalori imperturbati sono $E_\pm^{(0)} = \pm\mu B_z$, con i corrispondenti autostati imperturbati dati da $|+\rangle^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $|-\rangle^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. La correzione al primo ordine agli autovalori è nulla: $E_n^{(1)} = {}^{(0)}\langle n|W|n\rangle^{(0)} = 0$, con $n = +, -$. La correzione al secondo ordine è data da

$$E_n^{(2)} = \sum_{k\neq n} \frac{|{}^{(0)}\langle k|W|n\rangle^{(0)}|^2}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}} = \pm\frac{\mu B_z \epsilon^2}{2}, \tag{7}$$

dove i segni $+$ e $-$ sono ottenuti rispettivamente in corrispondenza a $n = +$ e $n = -$. La correzione al primo ordine per gli autostati è data da

$$|n\rangle^{(1)} = \sum_{k\neq n} \frac{{}^{(0)}\langle k|W|n\rangle^{(0)}}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}} |k\rangle^{(0)}, \tag{8}$$

ottenendo

$$|+\rangle^{(1)} = -\frac{\epsilon}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |-\rangle^{(1)} = \frac{\epsilon}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

(ii) Gli autovalori esatti si ottengono diagonalizzando l'hamiltoniana complessiva

$$H = -\mu B_z \begin{pmatrix} 1 & \epsilon \\ \epsilon & -1 \end{pmatrix} \tag{10}$$

e sono dati da $E_\pm = \pm\mu B_z\sqrt{1+\epsilon^2}$, con i corrispondenti autostati

$$|-\rangle = C_- \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{1+\epsilon^2} \\ \epsilon \end{pmatrix}, \quad |+\rangle = C_+ \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{1+\epsilon^2} \\ \epsilon \end{pmatrix}, \tag{11}$$

con $C_\pm$ costanti di normalizzazione. Sviluppando gli autovalori esatti al secondo ordine in ϵ e gli autostati esatti al primo ordine in ϵ ritroviamo i risultati perturbativi ottenuti sopra.