FISICA QUANTISTICA II – PROVA SCRITTA DEL 10/04/2017

1. Si consideri una particella di massa μ in una buca sferica,

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & \text{se } r \leq a, \\ 0 & \text{se } r > a, \end{cases} \tag{1}$$

con $V_0 \geq 0$.
(i) Determinare lo stato fondamentale del sistema, risolvendo l'equazione radiale per numero quantico relativo al momento angolare $l = 0$.
(ii) Quale condizione deve essere soddisfatta per avere almeno uno stato legato?

2. Una particella di massa m si muove in una dimensione sotto l'azione dell'hamiltoniana

$$H = H_0 + W, \quad H_0 = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}\, m\omega^2 X^2, \quad W = \alpha\,(X - x_0\, I). \tag{2}$$

(i) Si determinino mediante la teoria delle perturbazioni lo stato fondamentale di H fino all'ordine α e l'energia di tale stato fino all'ordine α^2.
(ii) Confrontare l'energia sopra ottenuta con l'energia esatta dello stato fondamentale di H.

SOLUZIONI PROVA SCRITTA DEL 10/04/2017

1. (i) Scriviamo gli stati stazionari del problema come $\phi_{klm}(r,\theta,\phi) = R_{kl}(r)Y_{lm}(\theta,\phi)$. Per $l=0$, $u_{k0}(r) = rR_{k0}(r)$ soddisfa all'equazione

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2}{dr^2} + V(r) - E\right] u_{k0}(r) = 0. \tag{3}$$

Cerchiamo stati legati, con $-V_0 < E < 0$. Con la condizione al contorno $u_{k0}(0) = 0$ determiniamo $u_{k0}(r) = A\sin(k_1 r)$ per $r \leq a$, con $k_1 = \sqrt{2\mu(V_0+E)/\hbar^2}$. Imponendo inoltre che la funzione d'onda sia normalizzabile otteniamo $u_{k0}(r) = B\exp(-k_2 r)$ per $r > a$, con $k_2 = \sqrt{-2\mu E/\hbar^2}$. Le condizioni di raccordo (continuità funzione e derivata prima) in $r = a$ danno le equazioni

$$\begin{aligned} A\sin(k_1 a) &= B\exp(-k_2 a), \\ Ak_1\cos(k_1 a) &= -Bk_2\exp(-k_2 a), \end{aligned} \tag{4}$$

dalle quali si ricava

$$\tan(k_1 a) = -\frac{k_1}{k_2} = -\frac{k_1 a}{\sqrt{C^2 - (k_1 a)^2}}, \quad C \equiv \sqrt{\frac{2\mu V_0}{\hbar^2}}\, a. \tag{5}$$

(ii) Risolvendo questa equazione per via grafica si vede come debba valere

$$V_0 > \frac{\pi^2\hbar^2}{8\mu a^2} \tag{6}$$

per avere almeno una soluzione (stato legato).

2. (i) Chiamiamo $\{|n\rangle^{(0)}\}$ la base degli autostati imperturbati, corrispondenti agli autovalori imperturbati $E_n^{(0)} = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$ dell'oscillatore armonico.

La correzione al primo ordine per lo stato fondamentale è data da

$$|0\rangle^{(1)} = \sum_{k\neq 0} \frac{{}^{(0)}\langle k|W|0\rangle^{(0)}}{E_0^{(0)} - E_k^{(0)}} |k\rangle^{(0)}. \tag{7}$$

Esprimendo X in funzione degli operatori di creazione e di distruzione otteniamo, al primo ordine in α,

$$|0\rangle \approx |0\rangle^{(0)} - \frac{\alpha}{\sqrt{2m\hbar\omega^3}}\,|1\rangle^{(0)}. \tag{8}$$

La correzione al primo ordine dell'energia dello stato fondamentale è data:

$$E_0^{(1)} = {}^{(0)}\langle 0|W|0\rangle^{(0)} = -\alpha x_0, \tag{9}$$

mentre la correzione al secondo ordine è data da

$$E_0^{(2)} = \sum_{k\neq 0} \frac{|{}^{(0)}\langle k|W|0\rangle^{(0)}|^2}{E_0^{(0)} - E_k^{(0)}} = -\frac{\alpha^2}{2m\omega^2}. \tag{10}$$

Al secondo ordine in α otteniamo quindi

$$E_0 \approx \frac{\hbar\omega}{2} - \alpha x_0 - \frac{\alpha^2}{2m\omega^2}. \tag{11}$$

(ii) Definendo

$$Y = X + \frac{\alpha}{m\omega^2}\, I, \tag{12}$$

otteniamo

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\, Y^2 - \alpha x_0 I - \frac{\alpha^2}{2m\omega^2}\, I. \tag{13}$$

L'energia esatta dello stato fondamentale di H coincide quindi con il risultato ottenuto sopra al secondo ordine della teoria delle perturbazioni.