

FISICA QUANTISTICA II – PROVA SCRITTA DEL 18/04/2023

1. Si consideri un sistema a spin 1 la cui hamiltoniana è data da

$$H = aS_z^2 + b(S_x^2 - S_y^2), \quad (1)$$

con a e b costanti dimensionali reali.

(i) Calcolare autovalori ed autostati di H .

(ii) Dato lo stato iniziale $|\psi(t = 0)\rangle = |l = 1, m = 1\rangle$, con $l(l + 1)\hbar^2$ e $m\hbar$ rispettivamente autovalori di S^2 e di S_z , calcolare per ogni $t \geq 0$ la probabilità $p_m(t)$ di ottenere $m\hbar$ da una misura di S_z .

2. Si consideri il moto quantistico di due particelle di massa m in una buca quadrata infinita,

$$V(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x_i \leq a, \\ +\infty & \text{altrimenti,} \end{cases} \quad (2)$$

con x_i ($i = 1, 2$) posizione della particella i -esima.

(i) Calcolare autovalori e autofunzioni dei tre stati di più bassa energia.

(ii) Calcolare per i tre stati del punto (i) le correzioni dei livelli energetici al primo ordine della teoria delle perturbazioni, e i corrispondenti autostati all'ordine zero, quando le particelle interagiscono mediante il potenziale $W(x_1, x_2) = \epsilon\delta(x_1 - x_2)$.

SOLUZIONI PROVA SCRITTA DEL 18/04/2023

1. (i) Abbiamo $\langle l, m | S_z | l, m' \rangle = m \hbar \delta_{m, m'}$, con $m, m' = 0, \pm 1$. Usando poi le proprietà degli operatori S_{\pm} possiamo costruire la rappresentazione matriciale degli operatori $S_x = (S_+ + S_-)/2$ e $S_y = (S_+ - S_-)/(2i)$ rispetto alla base $\{|1, 1\rangle, |1, 0\rangle, |1, -1\rangle\}$. Infine otteniamo la rappresentazione matriciale dell'hamiltoniana:

$$H = \hbar^2 \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Tale hamiltoniana ha come autovalori

$$\lambda_0 = 0, \quad \lambda_+ = \hbar^2(a + b), \quad \lambda_- = \hbar^2(a - b), \quad (4)$$

con i corrispondenti autovettori

$$|\phi_0\rangle = |1, 0\rangle, \quad |\phi_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1, 1\rangle + |1, -1\rangle), \quad |\phi_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1, 1\rangle - |1, -1\rangle). \quad (5)$$

- (ii) Siccome $|\psi(0)\rangle = |1, 1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\phi_+\rangle + |\phi_-\rangle)$, otteniamo

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{-i\hbar(a+b)t}|\phi_+\rangle + e^{-i\hbar(a-b)t}|\phi_-\rangle), \quad (6)$$

da cui, a parte una fase globale priva di significato fisico,

$$|\psi(t)\rangle = \cos(\hbar bt)|1, 1\rangle - i \sin(\hbar bt)|1, -1\rangle. \quad (7)$$

Dato che $p_m(t) = |\langle 1, m | \psi(t) \rangle|^2$, ricaviamo

$$p_1(t) = \cos^2(\hbar bt), \quad p_0(t) = 0, \quad p_{-1}(t) = \sin^2(\hbar bt). \quad (8)$$

2. (i) L'energia e la corrispondente funzione d'onda dello stato fondamentale sono ottenute quando entrambe le particelle si trovano nello stato fondamentale di singola particella:

$$E_{1,1} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{ma^2}, \quad \varphi_{1,1}(x_1, x_2) = \frac{2}{a} \sin\left(\frac{\pi x_1}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi x_2}{a}\right). \quad (9)$$

Nel primo stato eccitato una delle due particelle è nello stato fondamentale e l'altra nel primo stato eccitato di particella singola e quindi abbiamo un livello energetico con degenerazione due:

$$E_{1,2} = E_{2,1} = \frac{5\pi^2 \hbar^2}{2ma^2},$$

$$\varphi_{1,2}(x_1, x_2) = \frac{2}{a} \sin\left(\frac{\pi x_1}{a}\right) \sin\left(\frac{2\pi x_2}{a}\right), \quad \varphi_{2,1}(x_1, x_2) = \frac{2}{a} \sin\left(\frac{2\pi x_1}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi x_2}{a}\right). \quad (10)$$

- (ii) La correzione al prim'ordine dell'energia dello stato fondamentale è data da

$$E_{11}^{(1)} = \langle \varphi_{1,1} | W | \varphi_{1,1} \rangle = \frac{4\epsilon}{a^2} \int_0^a dx_1 \int_0^a dx_2 \sin^2\left(\frac{\pi x_1}{a}\right) \sin^2\left(\frac{\pi x_2}{a}\right) \delta(x_1 - x_2) = \frac{3\epsilon}{2a}. \quad (11)$$

Per calcolare le correzioni al prim'ordine per l'energia del primo stato eccitato dobbiamo diagonalizzare la matrice della perturbazione W nel corrispondente sottospazio degenere di dimensione due. Abbiamo $W_{12,12} = W_{12,21} = W_{21,12} = W_{21,21}$, con

$$W_{12,12} = \langle \varphi_{1,2} | W | \varphi_{1,2} \rangle = \frac{4\epsilon}{a^2} \int_0^a dx_1 \sin^2 \left(\frac{\pi x_1}{a} \right) \sin^2 \left(\frac{2\pi x_1}{a} \right) = \frac{\epsilon}{a} \quad (12)$$

In ultima istanza dobbiamo diagonalizzare la matrice

$$\frac{\epsilon}{a} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (13)$$

con autovalori (correzioni energetiche al primo ordine perturbativo) $2\epsilon/a$ e 0 . Gli autostati all'ordine zero, ottenuti diagonalizzando tale matrice, sono dati rispettivamente da

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_{1,2} + \varphi_{2,1}), \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_{1,2} - \varphi_{2,1}). \quad (14)$$