FISICA QUANTISTICA II – PROVA SCRITTA DEL 19/02/2024

1. Si consideri una particella a spin 1 e si chiami $\{|1\rangle, |0\rangle, |-1\rangle\}$ la base degli autostati di L_z, corrispondenti rispettivamente agli autovalori $\hbar, 0, -\hbar$. L'hamiltoniana del sistema è
$$H = \frac{\omega}{\hbar}((\mathbf{L}\cdot\mathbf{u})^2 - (\mathbf{L}\cdot\mathbf{v})^2), \tag{1}$$
con ω costante dimensionale e $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ versori che giacciono sul piano (x, z) e che formano angoli di $\pi/4$ con gli assi x e z, con $\mathbf{u}$ che giace nel quadrante $x, z > 0$ e $\mathbf{v}$ nel quadrante $x < 0, z > 0$.
(i) Calcolare gli autovalori di H e i suoi autostati rispetto alla base $\{|1\rangle, |0\rangle, |-1\rangle\}$.
(ii) Dato lo stato iniziale del sistema
$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle - |-1\rangle), \tag{2}$$
calcolare $|\psi(t)\rangle$ ad un generico tempo t.
(iii) Calcolare $\langle L_z\rangle$ in funzione di t.
(iv) Calcolare $\langle L_z^2\rangle$ in funzione di t.

2. Si considerino due oscillatori armonici debolmente accoppiati, descritti dall' hamiltoniana
$$H = H_0 + W, \quad H_0 = \frac{1}{2m}(P_1^2 + P_2^2) + \frac{1}{2}m\omega^2(X_1^2 + X_2^2), \quad W = gX_1^3X_2^3. \tag{3}$$
Si determinino mediante la teoria delle perturbazioni le correzioni ai due livelli di più bassa energia di H_0, fermandosi in tutti i casi all'ordine più basso per il quale la correzione è non nulla.

SOLUZIONI PROVA SCRITTA DEL 19/02/2024

1. (i) Date le direzioni dei versori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ abbiamo

$$\mathbf{L}\cdot\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(L_x + L_z), \quad \mathbf{L}\cdot\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-L_x + L_z), \tag{4}$$

da cui

$$H = \frac{\omega}{\hbar}(L_x L_z + L_z L_x), \tag{5}$$

e quindi nella base degli autostati di L_z la matrice H ha la forma

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}}\hbar\omega \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{6}$$

che ha come autovalori $E_1 = \hbar\omega$, $E_2 = 0$, $E_3 = -\hbar\omega$ e come rispettivi autostati

$$|E_1\rangle = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}, \quad |E_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad |E_3\rangle = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

(ii) Siccome

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|E_1\rangle + |E_3\rangle), \tag{8}$$

abbiamo

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{-i\hbar E_1/t}|E_1\rangle + e^{-i\hbar E_3/t}|E_3\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta(|1\rangle - |-1\rangle) - i\sin\theta|0\rangle, \tag{9}$$

dove abbiamo definito $\theta = E_1 t/\hbar$.

(iii) Dalla forma dello stato del sistema al tempo t abbiamo

$$p(L_z = \hbar) = p(L_z = -\hbar) = \frac{1}{2}\cos^2\theta, \quad p(L_z = 0) = \sin^2\theta, \tag{10}$$

da cui

$$\langle L_z\rangle = \hbar p(L_z = \hbar) - \hbar p(L_z = -\hbar) = 0 \tag{11}$$

per tutti i valori di θ (del tempo t).

(iv)

$$p(L_z^2 = \hbar^2) = \cos^2\theta, \quad p(L_z^2 = 0) = \sin^2\theta, \tag{12}$$

da cui

$$\langle L_z^2\rangle = \hbar^2 p(L_z^2 = \hbar^2) = \hbar^2\cos^2\theta = \hbar^2\cos^2\left(\frac{E_1 t}{\hbar}\right). \tag{13}$$

2. Conviene usare gli operatori di creazione e distruzione, con

$$X_i = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,(a_i + a_i^\dagger), \quad a_i|n_i\rangle = \sqrt{n_i}|n_i - 1\rangle, \quad a_i^\dagger|n_i\rangle = \sqrt{n_i + 1}|n_i + 1\rangle, \tag{14}$$

con $i = 1, 2$ e dove $|n_1, n_2\rangle$ sono gli autostati di H_0, con corrispondenti autovalori

$$E^{(0)}_{n_1,n_2} = \hbar\omega(n_1 + n_2 + 1), \quad n_1, n_2 = 0, 1, 2, \dots . \tag{15}$$

Definiamo anche $E^{(0)}_{n_1+n_2} = E^{(0)}_{n_1,n_2}$.

Lo stato fondamentale di H_0 ha energia $E^{(0)}_0 = E^{(0)}_{0,0} = \hbar\omega$ e non è degenere. La correzione perturbativa al prim'ordine si annulla in quanto

$$X^3|0\rangle = \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^{3/2} (3|1\rangle + \sqrt{6}|3\rangle), \tag{16}$$

da cui

$$\langle 0, 0|W|0, 0\rangle = 0. \tag{17}$$

Al secondo ordine invece

$$E^{(2)}_0 = \sum_{(n_1,n_2)\neq(0,0)} \frac{|\langle 0, 0|W|n_1, n_2\rangle|^2}{E^{(0)}_0 - E^{(0)}_{n_1+n_2}} = -\frac{147}{16}\frac{\hbar^2 g^2}{m^2\omega^4}. \tag{18}$$

Gli altri livelli energetici di H_0 sono degeneri, per cui va applicata la teoria delle perturbazioni in presenza di degenerazione. Per il livello $E^{(0)}_1 = 2\hbar\omega$, la matrice associata a W nel corrispondente sottospazio generato da $\{|01\rangle, |10\rangle\}$ è data da

$$W_1 = \frac{9}{8}\, g \left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{19}$$

che ha come autovalori $E^{(1)}_{1,\pm} = \pm\frac{9}{8}\, g \left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^3$. Quindi la perturbazione rimuove la degenerazione già al primo ordine perturbativo.