

FISICA QUANTISTICA II – PROVA SCRITTA DEL 19/06/2024

1. Una particella di massa m è vincolata a muoversi in due dimensioni sotto l'azione del potenziale

$$V(X, Y) = \frac{1}{2} m\omega_x^2 X^2 + \frac{1}{2} m\omega_y^2 Y^2. \quad (1)$$

La particella si trova all'istante t_0 nello stato

$$|\psi(t_0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_x^\dagger + a_y^\dagger)|0\rangle, \quad (2)$$

con $a_x^\dagger$ e $a_y^\dagger$ operatori di creazione relativi rispettivamente alle direzioni x e y .

- (i) Calcolare lo stato del sistema $|\psi(t)\rangle$ per ogni tempo $t > t_0$.
(ii) Determinare il valor medio della componente z del momento angolare in funzione del tempo.
2. Si consideri una particella di massa M e carica q , vincolata a muoversi nel piano xy lungo una circonferenza di raggio R e centro l'origine, e sottoposta ad un campo elettrico statico uniforme diretto lungo l'asse x . Il moto della particella è governato dall'operatore hamiltoniano

$$H = H_0 + W, \quad H_0 = \frac{P_\phi^2}{2MR^2} = -\frac{\hbar^2}{2MR^2} \frac{d^2}{d\phi^2}, \quad W = q\epsilon R \cos \phi, \quad (3)$$

con ϕ angolo compreso tra il raggio vettore che va dall'origine alla particella e l'asse delle x .

- (i) Determinare autovalori (specificandone il grado di degenerazione) ed autostati di H_0 .
(ii) Calcolare al secondo ordine in ϵ l'energia dello stato fondamentale del sistema.

SOLUZIONI PROVA SCRITTA DEL 19/06/2024

1. (i) Lo stato iniziale nella base $|n_x n_y\rangle$ è dato da

$$|\psi(t_0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|10\rangle + |01\rangle) \quad (4)$$

e quindi lo stato al tempo t è dato (a parte una fase globale priva di significato fisico) da

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ \exp[-i\omega_x(t-t_0)] |10\rangle + \exp[-i\omega_y(t-t_0)] |01\rangle \}. \quad (5)$$

(ii) Esprimendo $L_z = XP_y - YP_x$ in termini degli operatori di creazione e distruzione otteniamo

$$L_z = \frac{i\hbar}{2} [\mu(a_x a_y^\dagger - a_y a_x^\dagger) + \nu(a_x^\dagger a_y^\dagger - a_x a_y)] , \quad (6)$$

dove $\mu = \sqrt{\omega_y/\omega_x} + \sqrt{\omega_x/\omega_y}$ e $\nu = \sqrt{\omega_y/\omega_x} - \sqrt{\omega_x/\omega_y}$. Usando questa espressione per L_z e lo stato $|\psi(t)\rangle$ determinato al punto (i) ricaviamo

$$\langle L_z \rangle(t) = \langle \psi(t) | L_z | \psi(t) \rangle = \frac{\hbar}{2} \left(\sqrt{\frac{\omega_x}{\omega_y}} + \sqrt{\frac{\omega_y}{\omega_x}} \right) \sin[(\omega_x - \omega_y)(t - t_0)]. \quad (7)$$

2. (i) Gli autostati imperturbati sono dati da

$$\langle \phi | n \rangle^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{in\phi}, \quad (8)$$

con $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. I corrispondenti autovalori sono

$$E_n^{(0)} = \frac{\hbar^2 n^2}{2MR^2} \quad (9)$$

e quindi gli autovalori dell'energia hanno grado di degenerazione due, $E_n^{(0)} = E_{-n}^{(0)}$, con l'eccezione dell'energia $E_0^{(0)} = 0$ dello stato fondamentale, che non è degenere.

(iii) La correzione al primo ordine per l'energia dello stato fondamentale è nulla:

$$E_0^{(1)} = {}^{(0)}\langle 0 | W | 0 \rangle^{(0)} = 0, \quad (10)$$

mentre la correzione al secondo ordine è data da

$$E_0^{(2)} = \sum_{k \neq 0} \frac{|{}^{(0)}\langle k | W | 0 \rangle^{(0)}|^2}{E_0^{(0)} - E_k^{(0)}} = \sum_{k=\pm 1} \frac{|{}^{(0)}\langle k | W | 0 \rangle^{(0)}|^2}{E_0^{(0)} - E_k^{(0)}} = -Mq^2 \epsilon^2 R^4. \quad (11)$$