FISICA QUANTISTICA II – PROVA SCRITTA DEL 20/02/2023

1. Usando le relazioni di commutazione degli operatori vettoriali e degli operatori tensoriali irriducibili con il momento angolare, dimostrare che, se $V = (V_x, V_y, V_z)$ è un operatore vettoriale, allora $T^1_0 = V_z$, $T^1_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(V_x + iV_y)$ e $T^1_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(V_x - iV_y)$ sono le tre componenti di un operatore tensoriale irriducibile di rango 1.

2. Una particella di massa m si muove in una dimensione sotto l'azione dell'hamiltoniana

$$H = H_0 + W, \quad H_0 = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 X^2, \quad W = \epsilon X^3. \tag{1}$$

Si determinino mediante la teoria delle perturbazioni gli autovalori di H fino all'ordine ϵ^2 e gli autovettori fino all'ordine ϵ.

SOLUZIONI PROVA SCRITTA DEL 20/02/2023

1. Per definizione un operatore vettoriale soddisfa alle relazioni

$$[V_i, J_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}V_k, \quad i,j,k = x,y,z, \tag{2}$$

con $\mathbf{J} = (J_x, J_y, J_z)$ momento angolare. Per un operatore tensoriale irriducibile invece

$$[J_z, T_q^k] = \hbar q T_q^k, \quad [J_\pm, T_q^k] = \hbar\sqrt{k(k+1) - q(q\pm 1)}T_{q\pm 1}^k. \tag{3}$$

Quindi, definendo $T_0^1 = V_z$, $T_1^1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(V_x + iV_y)$ e $T_{-1}^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(V_x - iV_y)$ e assumendo le (2) verifichiamo le (3). Infatti

$$[J_z, T_0^1] = [J_z, V_z] = 0, \tag{4}$$

$$[J_\pm, T_0^1] = [J_x, V_z] \pm i[J_y, V_z] = i\hbar(-V_y \pm iV_x) = \hbar(\mp V_x - iV_y) = \hbar\sqrt{2}T_{\pm 1}, \tag{5}$$

$$[J_z, T_{\pm 1}^1] = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}[J_z, V_x \pm iV_y] = -\frac{\hbar}{\sqrt{2}}(V_x \pm iV_y) = \pm\hbar T_{\pm 1}^1, \tag{6}$$

$$[J_\pm, T_{\pm 1}^1] = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}[J_x \pm iJ_y, V_x \pm iV_y] = 0, \tag{7}$$

$$[J_\pm, T_{\mp 1}^1] = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}[J_x \pm iJ_y, V_x \mp iV_y] = \hbar\sqrt{2}T_0^1. \tag{8}$$

2. Chiamiamo $\{|n\rangle^{(0)}\}$ la base degli autostati imperturbati, corrispondenti agli autovalori imperturbati $E_n^{(0)} = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$ dell'oscillatore armonico. Esprimendo X in funzione degli operatori di creazione e di distruzione otteniamo

$$\begin{aligned} {}^{(0)}\langle k|W|n\rangle^{(0)} &= \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^{\frac{3}{2}} {}^{(0)}\langle k|(a + a^\dagger)|n\rangle^{(0)} \\ &= \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\sqrt{n(n-1)(n-2)}\delta_{k,n-3} + 3\sqrt{n^3}\delta_{k,n-1}\right. \\ &\left. +3\sqrt{(n+1)^3}\delta_{k,n+1} + \sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)}\delta_{k,n+3}\right). \end{aligned} \tag{9}$$

Vediamo quindi che la correzione al primo ordine agli autovalori imperturbati è nulla:

$$E_n^{(1)} = {}^{(0)}\langle n|W|n\rangle^{(0)} = 0, \tag{10}$$

mentre la correzione al secondo ordine è data da

$$E_n^{(2)} = \sum_{k\neq n} \frac{|{}^{(0)}\langle k|W|n\rangle^{(0)}|^2}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}} = -\frac{\hbar^2\epsilon^2}{8m^3\omega^4}(30n^2 + 30n + 11). \tag{11}$$

La correzione al primo ordine per gli autostati è data da

$$\begin{aligned} |n\rangle^{(1)} = \sum_{k\neq n} \frac{{}^{(0)}\langle k|W|n\rangle^{(0)}}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}}|k\rangle^{(0)} = \frac{\epsilon\hbar^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{3}{2}}3m^{\frac{3}{2}}\omega^{\frac{5}{2}}} \left(\sqrt{n(n-1)(n-2)}|n-3\rangle^{(0)}\right. \\ \left. +9\sqrt{n^3}|n-1\rangle^{(0)} - 9\sqrt{(n+1)^3}|n+1\rangle^{(0)} - \sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)}|n+3\rangle^{(0)}\right). \end{aligned} \tag{12}$$