FISICA QUANTISTICA II – PROVA SCRITTA DEL 20/06/2022

1. Si considerino due particelle a spin 1/2. Il sistema è governato dall'hamiltoniana

$$H = \frac{\omega}{\hbar}\,\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2. \tag{1}$$

Si assuma che al tempo $t = 0$ lo stato del sistema sia $|\psi(0)\rangle = |+-\rangle$, con $|+-\rangle = |+\rangle_1 \otimes |-\rangle_2$ e $S_{iz}|\pm\rangle_i = \pm\frac{\hbar}{2}\,|\pm\rangle_i$ $(i = 1, 2)$.
(i) Determinare lo stato del sistema ad un generico tempo $t > 0$.
(ii) Calcolare $\langle S_{1z}\rangle(t)$ per ogni $t > 0$.

2. L'hamiltoniana di un sistema a due livelli è data da

$$H = H_0 + W, \quad H_0 = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}, \quad W = \epsilon \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Confrontare gli autovalori esatti con quelli ottenuti al primo ordine della teoria delle perturbazioni.

SOLUZIONI PROVA SCRITTA DEL 20/06/2022

1. (i) Conviene scrivere
$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(|10\rangle + |00\rangle), \tag{3}$$
dove $|SM\rangle$ indica l'autostato simultaneo di S^2 (con autovalore $S(S+1)\hbar^2$) e S_z (con autovalore $M\hbar$). Conviene anche scrivere
$$H = \frac{\omega}{2\hbar}\,(S^2 - S_1^2 - S_2^2). \tag{4}$$
Gli autovalori di H sono quindi dati da
$$E_S = \frac{\hbar\omega}{2}\left(S(S+1) - \frac{3}{2}\right), \tag{5}$$
con $S = 0, 1$, indipendentemente dal valore di M. Quindi
$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\left(e^{-iE_1t/\hbar}|10\rangle + e^{-iE_0t/\hbar}|00\rangle\right). \tag{6}$$
Allora, a meno di una fase globale,
$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\left(|10\rangle + e^{i\omega t}|00\rangle\right). \tag{7}$$
(ii) Conviene scrivere
$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{2}\,\left[\left(1 + e^{i\omega t}\right)| + -\rangle + \left(1 - e^{i\omega t}\right)| - +\rangle\right]. \tag{8}$$
Otteniamo allora
$$\langle S_{1z}\rangle = \frac{\hbar}{2}\left(\left|\frac{1 + e^{i\omega t}}{2}\right|^2 - \left|\frac{1 - e^{i\omega t}}{2}\right|^2\right) = \frac{\hbar}{2}\,\cos(\omega t). \tag{9}$$

2. Dobbiamo distinguere nel calcolo perturbativo il caso non degenere ($a_1 \neq a_2$) da quello degenere ($a_1 = a_2$). Nel primo caso dalla teoria delle perturbazioni al primo ordine ricaviamo gli autovalori
$$E_1 = a_1 + \epsilon b_1, \quad E_2 = a_2 \tag{10}$$
Nel secondo caso dobbiamo diagonalizzare la matrice W ottenendo, sempre al primo ordine in ϵ, gli autovalori
$$E_\pm = a_1 + \frac{\epsilon}{2}\left(b_1 \pm \sqrt{b_1^2 + 4b_2^2}\right) \tag{11}$$
Diagonalizzando H otteniamo gli autovalori esatti
$$\epsilon_\pm = \frac{1}{2}\left[a_1 + a_2 + \epsilon b_1 \pm \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + 2(a_1 - a_2)b_1\epsilon + (b_1^2 + 4b_2^2)\epsilon^2}\right]. \tag{12}$$
Per $a_1 = a_2$ otteniamo il risultato perturbativo, che quindi in questo caso è esatto. Per $a_1 \neq a_2$ il risultato perturbativa è recuperato espandendo quello esatto al primo ordine in ϵ.