FISICA QUANTISTICA II – PROVA SCRITTA DEL 21/06/2021

1. Si consideri una particella a spin 1/2 di massa m, vincolata a muoversi su una sfera di raggio R e la cui hamiltoniana è data da

$$H = \frac{L^2}{2mR^2} + \omega(2L_z + S_z). \tag{1}$$

Lo stato iniziale della particella (al tempo $t = 0$) è dato dallo spinore

$$[\psi](\theta, \phi; 0) = N \begin{pmatrix} -\sin\theta\cos\phi \\ \sqrt{\frac{2}{3}} + \cos\theta \end{pmatrix}, \tag{2}$$

doce N è una costante di normalizzazione.
(i) Calcolare lo stato della particella per ogni tempo $t \geq 0$.
(ii) Determinare in funzione del tempo i possibili risultati delle misure di L^2, L_z, S_z e le relative probabilità.
Si ricorda che

$$Y_{00}(\theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \quad Y_{11}(\theta, \phi) = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta e^{i\phi}, \quad Y_{10}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta, \tag{3}$$

$$Y_{l,-m}(\theta, \phi) = (-)^m Y^{\star}_{l,m}(\theta, \phi). \tag{4}$$

2. Si consideri una particella di massa m soggetta all'hamiltoniana

$$H = H_0 + W, \tag{5}$$

$$H_0 = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 X^2, \tag{6}$$

$$W = \lambda \sin(kX). \tag{7}$$

(i) Trattando W perturbativamente, calcolare all'ordine più basso la correzione allo stato fondamentale di H_0.
(ii) Calcolare, all'ordine più basso in λ, il valore di aspettazione di X rispetto allo stato fondamentale perturbato.
Può essere utile scrivere X in W in termini degli operatori di creazione e distruzione e usare la formula, valida per $[A, B] = cI$, con c costante,

$$e^{A+B} = e^A e^B e^{-[A,B]/2}. \tag{8}$$

SOLUZIONI PROVA SCRITTA DEL 21/06/2021

1. (i) Riscriviamo lo stato iniziale come

$$[\psi](\theta,\phi;0) = N \begin{pmatrix} \sqrt{2\pi/3}(Y_{11} - Y_{1,-1}) \\ \sqrt{4\pi/3}(\sqrt{2}Y_{00} + Y_{10}) \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Indicando con $|l^2, l_z\rangle$ gli autostati comuni di L^2 e L_z corrispondenti agli autovalori $\hbar^2 l(l+1)$ e $\hbar l_z$ e con $|\pm\rangle$ gli autostati di S_z corrispondenti agli autovalori $\pm\hbar/2$, riscriviamo lo stato iniziale come

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{8}}[(|1,1\rangle - |1,-1\rangle) \otimes |+\rangle + \sqrt{2}(\sqrt{2}|0,0\rangle + |1,0\rangle) \otimes |-\rangle]. \tag{10}$$

Lo stato al tempo t è quindi dato da

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{8}}[e^{-i\hbar t/(mR^2) - i\omega t/2}(e^{-2i\omega t}|1,1\rangle - e^{2i\omega t}|1,-1\rangle) \otimes |+\rangle$$

$$+\sqrt{2}e^{i\omega t/2}(\sqrt{2}|0,0\rangle + e^{-i\hbar t/(mR^2)}|1,0\rangle) \otimes |-\rangle]. \tag{11}$$

(ii) Siccome L^2, L_z, S_z commutano con H, le probabilità dei risultati delle misure di questi operatori non cambiano nel tempo e possiamo ad esempio calcolarle a $t = 0$. Otteniamo

$$p(L^2 = 0) = \frac{1}{2}, \quad p(L^2 = 2\hbar^2) = \frac{1}{2}, \tag{12}$$

$$p(L_z = \hbar) = \frac{1}{8}, \quad p(L_z = 0) = \frac{3}{4}, \quad p(L_z = -\hbar) = \frac{1}{8}, \tag{13}$$

$$p(S_z = \hbar/2) = \frac{1}{4}, \quad p(S_z = -\hbar/2) = \frac{3}{4}. \tag{14}$$

2. (i) Abbiamo, al primo ordine perturbativo,

$$|0\rangle^{(1)} = |0\rangle^{(0)} - \frac{\lambda}{\hbar\omega}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{{}^{(0)}\langle n|\sin(kX)|0\rangle^{(0)}}{n}|n\rangle^{(0)}. \tag{15}$$

L'elemento di matrice che compare in questa espressione è la parte immaginaria di

$${}^{(0)}\langle n|e^{ikX}|0\rangle^{(0)} = {}^{(0)}\langle n|\exp\left[ik\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a + a^\dagger)\right]|0\rangle^{(0)}$$

$$= {}^{(0)}\langle n|\exp\left[ik\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}a^\dagger\right]\exp\left[ik\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}a\right]|0\rangle^{(0)}e^{-\hbar k^2/(4m\omega)}$$

$$= {}^{(0)}\langle n|\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l!}\left(ik\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}a^\dagger\right)^l|0\rangle^{(0)}e^{-\hbar k^2/(4m\omega)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n!}}\left(ik\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\right)^n e^{-\hbar k^2}(4m\omega). \tag{16}$$

Quindi

$$|0\rangle^{(1)} = |0\rangle^{(0)}$$

$$-\frac{\lambda}{\hbar\omega}e^{-\hbar k^2/(4m\omega)}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-)^m}{(2m+1)\sqrt{(2m+1)!}}\left(k\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\right)^{2m+1}|2m+1\rangle^{(0)}. \qquad (17)$$

(ii)

$$^{(1)}\langle 0|X|0\rangle^{(1)}$$

$$= -\frac{2\lambda}{\hbar\omega}e^{-\hbar k^2/(4m\omega)}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-)^m}{(2m+1)\sqrt{(2m+1)!}}\left(k\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\right)^{2m+1}{}^{(0)}\langle 0|X|2m+1\rangle^{(0)}$$

$$= -\frac{\lambda k}{m\omega^2}\,e^{-\hbar k^2/(4m\omega)}. \qquad (18)$$