FISICA QUANTISTICA II – PROVA SCRITTA DEL 21/06/2023

1. Si considerino due spin, $S_1 = 1$ e $S_2 = \frac{1}{2}$. Si derivi la trasformazione che permette di passare dalla base $\{|S_1, S_2; S_{1z}, S_{2z}\rangle\}$ alla base $\{|J, M\rangle\}$, con $\vec{J} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$ e $M = S_{1z} + S_{2z}$.

2. Si consideri una particella soggetta al potenziale $V(x) = \alpha|x|$ e la funzione d'onda

$$\psi_b(x) = \left(\frac{2b}{\pi}\right)^{1/4} \exp(-bx^2), \tag{1}$$

con b parametro reale.
(i) Calcolare il valore medio dell'energia per lo stato $\psi_b(x)$.
(ii) Determinare il valore di b che porta alla stima migliore dell'energia dello stato fondamentale del sistema.
Nota: si ricorda che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx x^2 \exp(-bx^2) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{b^3}}. \tag{2}$$

SOLUZIONI PROVA SCRITTA DEL 21/06/2023

1. Lo spazio di Hilbert complessivo dei due spin ha dimensione 6, e i sottospazi corrispondenti a $J = \frac{3}{2}$ e $J = \frac{1}{2}$ hanno rispettivamente dimensione 4 e 2.

   Cominciamo con l'identificare

$$|\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\rangle = |1, \frac{1}{2}; 1, \frac{1}{2}\rangle. \tag{3}$$

   Applichiamo poi J_- al primo membro di questa uguaglianza. Usando la relazione

$$J_-|J, M\rangle = \sqrt{J(J+1) - M(M-1)}|J, M-1\rangle \tag{4}$$

   otteniamo

$$J_-|\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\rangle = \sqrt{3}|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle. \tag{5}$$

   Applicando poi $J_- = S_{1-} + S_{2-}$ al secondo membro della (3) otteniamo

$$(S_{1-} + S_{2-})|1, \frac{1}{2}; 1, \frac{1}{2}\rangle = \sqrt{2}|1, \frac{1}{2}; 0, \frac{1}{2}\rangle + |1, \frac{1}{2}; 1, -\frac{1}{2}\rangle \tag{6}$$

   e quindi

$$|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}|1, \frac{1}{2}; 0, \frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}|1, \frac{1}{2}; 1, -\frac{1}{2}\rangle. \tag{7}$$

   Applicando quindi ripetutamente $J_- = S_{1-} + S_{2-}$ otteniamo

$$|\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}|1, \frac{1}{2}; -1, \frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|1, \frac{1}{2}; 0, -\frac{1}{2}\rangle, \tag{8}$$

$$|\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\rangle = |1, \frac{1}{2}; -1, -\frac{1}{2}\rangle. \tag{9}$$

   Per ottenere $|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$, lo scriviamo come combinazione lineare dei vettori con $S_{1z} + S_{2z} = \frac{1}{2}$,

$$|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle = \alpha|1, \frac{1}{2}; 0, \frac{1}{2}\rangle + \beta|1, \frac{1}{2}; 1, -\frac{1}{2}\rangle \tag{10}$$

   e imponiamo l'ortogonalità al vettore $|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle$ determinato in precedenza. Scegliendo $\alpha > 0$ e normalizzando lo stato $|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$ otteniamo

$$|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}|1, \frac{1}{2}; 0, \frac{1}{2}\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}|1, \frac{1}{2}; 1, -\frac{1}{2}\rangle. \tag{11}$$

   Applicando infine $J_- = S_{1-} + S_{2-}$ ad ambo i membri di questa relazione otteniamo

$$|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}|1, \frac{1}{2}; -1, \frac{1}{2}\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}}|1, \frac{1}{2}; 0, -\frac{1}{2}\rangle. \tag{12}$$

2. (i) Il valor medio dell'energia è dato da $\langle H\rangle = \langle T\rangle + \langle V\rangle$, con

$$\langle T\rangle = \langle\psi_b|(P^2/2m)|\psi_b\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\psi_b(x)\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\right)\psi_b(x) = \frac{\hbar^2 b}{2m}, \tag{13}$$

$$\langle V\rangle = \langle\psi_b|V(X)|\psi_b\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\psi_b^2(x)\alpha|x| = \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi b}}. \tag{14}$$

(ii) Il minimo dell'energia media è ottenuto risolvendo l'equazione

$$\left(\frac{\partial\langle H\rangle}{\partial b}\right)_{b=b_0} = 0, \tag{15}$$

ottenendo

$$b_0 = \left(\frac{m\alpha}{\sqrt{2\pi}\hbar^2}\right)^{2/3}, \tag{16}$$

con la corrispondente energia

$$E_{b_0} = \langle\psi_{b_0}|H|\psi_{b_0}\rangle = \left(\frac{\hbar^2\alpha^2}{16\pi m}\right)^{1/3} + \left(\frac{\hbar^2\alpha^2}{4\pi^2 m}\right)^{1/3}. \tag{17}$$

Questo valore dell'energia è un limite superiore per l'energia dello stato fondamentale del sistema.