

FISICA QUANTISTICA II – PROVA SCRITTA DEL 22/07/2024

1. Data una particella quantistica in uno spazio tridimensionale, si considerino le osservabili L_z e X^2 .
 - (i) Determinare il limite imposto dal teorema di Robertson al prodotto $\Delta(L_z)\Delta(X^2)$.
 - (ii) Nel caso di un oscillatore armonico tridimensionale e di un autostato simultaneo di H , L^2 e L_z , cosa possiamo concludere dal punto precedente a proposito di $\langle XY \rangle$?
2. Si consideri un sistema a due livelli, governato dall'hamiltoniana

$$H = H_0 + W, \quad H_0 = \begin{pmatrix} E_0 & 0 \\ 0 & -E_0 \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} 0 & \Delta \\ \Delta & 0 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

- (i) Calcolare per $E_0 \neq 0$ le correzioni ai livelli energetici di H_0 al second'ordine e le correzioni agli autostati di H_0 al prim'ordine della teoria delle perturbazioni.
- (ii) Confrontare i risultati ottenuti con i corrispondenti autovalori e autostati esatti di H , espansi al second'ordine in Δ/E_0 per quanto riguarda gli autovalori e al prim'ordine in Δ/E_0 per gli autostati.
- (iii) Discutere il caso $E_0 = 0$.
(Si suggerisce di definire $\sin \theta = \frac{\Delta}{B}$, con $B = \sqrt{E_0^2 + \Delta^2}$.)

SOLUZIONI PROVA SCRITTA DEL 22/07/2024

1. (i) Abbiamo

$$[L_z, X] = [XP_y - YP_x, X] = -Y[P_x, X] = i\hbar Y \quad (2)$$

e quindi

$$[L_z, X^2] = X[L_z, X] + [L_z, X]X = 2i\hbar XY. \quad (3)$$

Dal teorema di Robertson abbiamo quindi

$$\Delta(L_z)\Delta(X^2) \geq \hbar|\langle XY \rangle|. \quad (4)$$

(ii) Per un autostato di L_z abbiamo $\Delta(L_z) = 0$ e quindi dal teorema di Robertson $\langle XY \rangle = 0$.

2. (i) Per $E_0 \neq 0$ gli autovalori di H_0 sono non degeneri, $E_{\pm}^{(0)} = \pm E_0$, e i corrispondenti autostati sono $|+\rangle^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $|-\rangle^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Le correzioni energetiche al prim'ordine si annullano in quanto ${}^{(0)}\langle +|W|+\rangle^{(0)} = {}^{(0)}\langle -|W|-\rangle^{(0)} = 0$. Al second'ordine

$$E_+^{(2)} = \frac{|{}^{(0)}\langle -|W|+\rangle^{(0)}|^2}{E_+^{(0)} - E_-^{(0)}} = \frac{\Delta^2}{2E_0}, \quad E_-^{(2)} = \frac{|{}^{(0)}\langle +|W|-\rangle^{(0)}|^2}{E_-^{(0)} - E_+^{(0)}} = -\frac{\Delta^2}{2E_0}. \quad (5)$$

Per gli autostati la correzione al prim'ordine è data da

$$\begin{aligned} |+\rangle^{(1)} &= \frac{{}^{(0)}\langle -|W|+\rangle^{(0)}}{E_+^{(0)} - E_-^{(0)}}|-\rangle^{(0)} = \frac{\Delta}{2E_0}|-\rangle^{(0)}, \\ |-\rangle^{(1)} &= \frac{{}^{(0)}\langle +|W|-\rangle^{(0)}}{E_-^{(0)} - E_+^{(0)}}|+\rangle^{(0)} = -\frac{\Delta}{2E_0}|+\rangle^{(0)}. \end{aligned} \quad (6)$$

(ii) Gli autovalori esatti sono dati da $E_{\pm} = \pm\sqrt{E_0^2 + \Delta^2}$. Sviluppandoli al secondo ordine in Δ/E_0 otteniamo

$$E_{\pm} \approx \pm E_0 \pm \frac{\Delta^2}{2E_0} = E_{\pm}^{(0)} + E_{\pm}^{(2)}. \quad (7)$$

Gli autostati esatti sono dati

$$|+\rangle = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \quad |-\rangle = \begin{pmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Sviluppandoli al prim'ordine in Δ/E_0 otteniamo

$$|+\rangle \approx \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\Delta}{2E_0} \end{pmatrix} = |+\rangle^{(0)} + |+\rangle^{(1)}, \quad |-\rangle \approx \begin{pmatrix} -\frac{\Delta}{2E_0} \\ 1 \end{pmatrix} = |-\rangle^{(0)} + |-\rangle^{(1)}. \quad (9)$$

(iii) Nel caso $E_0 = 0$ dobbiamo applicare la teoria delle perturbazioni in presenza di degenerazione, diagonalizzando la perturbazione W nell'intero spazio di Hilbert bidimensionale (che è degenere per H_0), ottenendo i livelli energetici $E_{\pm} = \pm\Delta$ e i corrispondenti autostati

$$|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle^{(0)} \pm |-\rangle^{(0)}). \quad (10)$$

Tali autovalori ed autofunzioni sono esatti in quanto abbiamo diagonalizzato W e per $E_0 = 0$ abbiamo $H = W$.