

FISICA QUANTISTICA II – PROVA SCRITTA DEL 23/01/2023

1. Una particella di massa μ si muove liberamente nel guscio sferico $r_1 \leq r \leq r_2 = r_1 + \epsilon$, con barriere impenetrabili sulle due sfere $r = r_1$ e $r = r_2$.
 - (i) Si calcolino i livelli energetici e le autofunzioni nell'approssimazione in cui il potenziale centrifugo è costante e preso uguale al suo valore in $r_0 = (r_1 + r_2)/2$ (con $r_0 \gg \epsilon$).
 - (ii) Calcolare la correzione ai livelli energetici ottenuta sviluppando il potenziale centrifugo al primo ordine in $(r - r_0)/r_0$.
2. Si consideri una particella di massa m , soggetta al potenziale centrale di Yukawa,

$$V(r) = -\frac{\alpha e^{-\lambda r}}{r}, \quad \alpha, \lambda > 0. \quad (1)$$

- (i) Studiare l'andamento asintotico per $r \rightarrow 0^+$ degli stati stazionari del sistema.
- (ii) Per gli stati legati, calcolare gli autovalori dell'energia al primo ordine in λ .
- (iii) Calcolare l'energia dello stato fondamentale al secondo ordine in λ .

SOLUZIONI PROVA SCRITTA DEL 23/01/2023

1. (i) Il problema è di tipo centrale e quindi possiamo scrivere le autofunzioni come

$$f_{nlm}(r, \theta, \phi) = \frac{u_{nl}(r)}{r} Y_{lm}(\theta, \phi), \quad (2)$$

con la u che soddisfa l'equazione di Schrödinger radiale

$$u_{nl}''(r) + \frac{2m}{\hbar^2} [E - V_c(r)] u_{nl}(r) = 0, \quad (3)$$

con il potenziale centrifugo $V_c(r) = \hbar^2 l(l+1)/(2\mu r^2)$. Approssimiamo ora V_c con il suo valore in r_0 e operiamo il cambio di variabile $x = r - r_0$. Quindi otteniamo l'equazione

$$u_{nl}''(x) + \frac{2m}{\hbar^2} [E - V_c(r_0)] u_{nl}(x) = 0, \quad (4)$$

con le condizioni al contorno $u_{nl}(-\epsilon/2) = u_{nl}(\epsilon/2) = 0$. Abbiamo quindi il problema della particella in una buca infinita, con vettore d'onda

$$k = \frac{\sqrt{2m(E - V_c(r_0))}}{\hbar} \quad (5)$$

che deve soddisfare $k = n\pi/\epsilon$, con $n = 1, 2, 3, \dots$. Abbiamo quindi le autofunzioni

$$u_n(x) = \langle x|n \rangle = \sqrt{\frac{2}{\epsilon}} \cos\left(\frac{n\pi x}{\epsilon}\right) \quad (6)$$

per n dispari e

$$u_n(x) = \langle x|n \rangle = \sqrt{\frac{2}{\epsilon}} \sin\left(\frac{n\pi x}{\epsilon}\right) \quad (7)$$

per n pari, con corrispondenti autovalori

$$E_{nl} = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{n\pi}{\epsilon}\right)^2 + V_c(r_0) = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\pi^2 n^2}{\epsilon^2} + \frac{l(l+1)}{r_0^2}\right). \quad (8)$$

- (ii) Il potenziale centrifugo al primo ordine in x/r_0 è dato da

$$V_c(r) = V_c(r_0) + W, \quad W = -2V_c(r_0)x/r_0. \quad (9)$$

Siccome la perturbazione W è dispari e le autofunzioni hanno parità definita, la correzione $\langle n|W|n \rangle$ si annulla.

2. (i) Il potenziale è di tipo centrale, quindi le autofunzioni dell'hamiltoniana possono essere scritte nella forma

$$\psi_{nlm}(r, \theta, \phi) = \frac{u_{nl}(r)}{r} Y_{lm}(\theta, \phi). \quad (10)$$

Siccome $V(r) \sim -\alpha/r$ per $r \rightarrow 0^+$, l'andamento nell'origine è lo stesso che per l'atomo di idrogeno, $u_{nl}(r) \sim r^{l+1}$.

(ii) Al primo ordine in λ ,

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r} + \lambda\alpha, \quad (11)$$

che è un potenziale coulombiano, a meno di una costante additiva (positiva) $\lambda\alpha$. Pertanto gli autovalori al primo ordine in α sono dati da

$$E_n = -\frac{\alpha}{2an^2} + \lambda\alpha, \quad a = \frac{\hbar^2}{m\alpha}. \quad (12)$$

(iii) Al secondo ordine in λ ,

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r} + \lambda\alpha - \frac{\lambda^2\alpha r}{2}. \quad (13)$$

La correzione al secondo ordine in λ all'energia dello stato fondamentale può essere calcolata usando la teoria delle perturbazioni al primo ordine per la correzione data dal termine $W = -\lambda^2\alpha r/2$, usando lo stato fondamentale di $H_0 = \mathbf{p}^2/2m - \alpha/r + \lambda\alpha$, che è quello dell'atomo di idrogeno:

$$\Delta E_1 = \langle 1, 0, 0 | W | 1, 0, 0 \rangle = -\frac{4\lambda^2\alpha}{2a^3} \int_0^\infty e^{-2r/a} r^3 dr = -\frac{3}{4} \lambda^2\alpha a, \quad (14)$$

dove $|1, 0, 0\rangle = |n=1, l=0, m=0\rangle$ è lo stato fondamentale dell'atomo di idrogeno. Quindi, al secondo ordine in λ^2 , l'energia dello stato fondamentale è data da

$$E_1 = -\frac{\alpha}{2a} + \lambda\alpha - \frac{3}{4} \lambda^2\alpha a = -\frac{m\alpha^2}{2\hbar^2} + \lambda\alpha - \frac{3\lambda^2\hbar^2}{4m}. \quad (15)$$