

FISICA QUANTISTICA II – PROVA SCRITTA DEL 26/07/2021

1. Si consideri un sistema quantistico preparato in un autostato di L^2 , corrispondente all'autovalore $\hbar^2 l(l+1)$.
 - (i) Si trovi per un tale stato il limite inferiore a $\Delta L_x \Delta L_y$ imposto dal principio di indeterminazione.
 - (ii) Considerando ora un autostato simultaneo di L^2 e L_z , calcolare $\langle L_x \rangle$, $\langle L_y \rangle$, $\langle L_x^2 \rangle$, $\langle L_y^2 \rangle$, verificando poi in particolare che la disuguaglianza ricavata al punto (i) è soddisfatta.
2. Si consideri l'oscillatore armonico tridimensionale isotropo, con hamiltoniana

$$H_0 = \frac{1}{2m} (P_x^2 + P_y^2 + P_z^2) + \frac{1}{2} m\omega^2 (X^2 + Y^2 + Z^2), \quad (1)$$

soggetto alla perturbazione

$$W = \lambda X^2 Y Z, \quad (2)$$

con λ costante. Calcolare le correzioni energetiche al primo ordine per

- (i) lo stato fondamentale di H_0 ;
- (ii) il primo stato eccitato di H_0 .

SOLUZIONI PROVA SCRITTA DEL 26/07/2021

1. (i) Scrivendo

$$\psi(\theta, \phi) = \sum_{m=-l}^l c_m Y_{lm}(\theta, \phi), \quad \sum_{m=-l}^l |c_m|^2 = 1, \quad (3)$$

otteniamo

$$\Delta L_x \Delta L_y \geq \frac{1}{2} |\langle \psi | [L_x, L_y] | \psi \rangle| = \frac{\hbar}{2} |\langle \psi | L_z | \psi \rangle| = \frac{\hbar^2}{2} \left| \sum_{m=-l}^l m |c_m|^2 \right|. \quad (4)$$

(ii) Per uno stato $\langle \theta, \phi | l, m \rangle = Y_{lm}(\theta, \phi)$, esprimendo L_x e L_y in funzione degli operatori L_+ e L_- , otteniamo

$$\langle l, m | L_x | l, m \rangle = \langle l, m | L_y | l, m \rangle = 0, \quad (5)$$

$$\langle l, m | L_x^2 | l, m \rangle = \langle l, m | L_y^2 | l, m \rangle = \frac{\hbar^2}{2} [l(l+1) - m^2]. \quad (6)$$

Quindi

$$\Delta L_x \Delta L_y = \frac{\hbar^2}{2} [l(l+1) - m^2] \geq \frac{\hbar^2 l}{2} \geq \frac{\hbar^2 |m|}{2}, \quad (7)$$

con $\hbar^2 |m|/2$ che è proprio il limite inferiore imposto dal principio di Heisenberg, si veda la (4) nel caso particolare di un autostato $|l, m\rangle$.

2. All'ordine zero,

$$E_n^{(0)} = \hbar\omega \left(n_x + n_y + n_z + \frac{3}{2} \right), \quad (8)$$

con $n_x, n_y, n_z = 0, 1, 2, \dots$ e $n = n_x + n_y + n_z$. Indichiamo le corrispondenti autofunzioni con $|n_x n_y n_z\rangle$

(i) Lo stato fondamentale ad energia $E_0^{(0)} = \frac{3}{2} \hbar\omega$ è non degenero e quindi

$$E_0^{(1)} = \langle 000 | W | 000 \rangle = \lambda \langle 0 | X^2 | 0 \rangle \langle 0 | Y | 0 \rangle \langle 0 | Z | 0 \rangle = 0. \quad (9)$$

Per ricavare tale risultato conviene introdurre gli operatori di creazione e distruzione, con

$$X = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (a_x^\dagger + a_x), \quad (10)$$

e analogamente per Y e Z . Abbiamo quindi

$$\langle 0 | X^2 | 0 \rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}, \quad \langle 0 | Y | 0 \rangle = \langle 0 | Z | 0 \rangle = 0. \quad (11)$$

(ii) Il primo stato eccitato $E_1^{(0)} = \frac{5}{2} \hbar\omega$ ha degenerazione tre. Diagonalizziamo quindi W nell'autospazio generato da $\{|001\rangle, |010\rangle, |100\rangle\}$:

$$W = \lambda \left(\frac{\hbar}{2m\omega} \right)^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

W ha come autovalori $0, \pm \lambda \left(\frac{\hbar}{2m\omega} \right)^2$. Queste sono le correzioni energetiche al primo ordine e quindi la degenerazione viene completamente rimossa dalla perturbazione.