FISICA QUANTISTICA II – PROVA SCRITTA DEL 09/11/2021

1. Si consideri il moto tridimensionale di una particella, governato dall'operatore hamiltoniano
$$H = \frac{L^2}{2I} + cL_z, \tag{1}$$
con $\vec{L}$ momento angolare orbitale della particella e I, c costanti. Sia lo stato iniziale
$$\psi(r, \theta, \phi; t = 0) = R(r)[\alpha Y_{11}(\theta, \phi) + \beta Y_{1,-1}(\theta, \phi)], \tag{2}$$
con $\int_0^{+\infty} dr\, r^2 |R(r)|^2 = 1$ e $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.
(i) Determinare $\psi(r, \theta, \phi; t)$ per ogni $t \geq 0$.
(ii) Dire quali sono i valori possibili che può dare una misura di L^2 e con che probabilità vengono ottenuti, in funzione del tempo t. Rispondere alla medesima domanda per L_z e per L_x.

2. Si consideri un sistema quantistico a tre livelli governato dall'hamiltoniana
$$H = H_0 + W, \quad H_0 = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad W = \alpha \begin{pmatrix} -\epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon \\ 0 & \epsilon & 0 \end{pmatrix}, \tag{3}$$
con α costante avente le dimensioni di un'energia ed $\epsilon \ll 1$. Calcolare:
(i) autovalori ed autostati di H_0,
(ii) gli autovalori esatti di H,
(iii) lo sviluppo al secondo ordine della teoria delle perturbazioni per l'autovalore non degenere di H_0, confrontando il risultato ottenuto con lo sviluppo del corrispondente autovalore esatto di H,
(iv) lo sviluppo al primo ordine della teoria delle perturbazioni per l'autovalore degenere di H_0, confrontando il risultato ottenuto con lo sviluppo dei corrispondenti autovalori esatti di H.

SOLUZIONI PROVA SCRITTA DEL 09/11/2021

1. (i) Lo stato al tempo t è dato da

$$\psi(r,\theta,\phi;t) + R(r)[\alpha e^{-i\left(\frac{\hbar}{I}+c\right)t}Y_{11}(\theta,\phi) + e^{-i\left(\frac{\hbar}{I}-c\right)t}\beta Y_{1,-1}(\theta,\phi)]. \tag{4}$$

(ii) Siccome L^2 e L_z sono costanti del moto (commutando con l'hamiltoniano), per queste due grandezze basta risolvere il problema al tempo $t = 0$. Siccome $L^2\psi(r,\theta,\phi;0) = 2\hbar^2\psi(r,\theta,\phi;0)$, ne consegue che $2\hbar^2$ è l'unico possibile risultato per la misura di L^2, ottenuto quindi con probabilità $p(L^2 = 2\hbar^2) = 1$. Dato che

$$L_z R(r)[\alpha Y_{11}(\theta,\phi) + \beta Y_{1,-1}(\theta,\phi)] = \hbar R(r)[\alpha Y_{11}(\theta,\phi) - \beta Y_{1,-1}(\theta,\phi)], \tag{5}$$

ne consegue che $p(L_z = \hbar) = |\alpha|^2$ e $p(L_z = -\hbar) = |\beta|^2$.

Per quanto riguarda L_x, conviene prima di tutto scrivere lo stato del sistema nella base degli autostati di L_x. A tal fine scriviamo la matrice associata ad L_x rispetto alla base degli autostati di L^2 e L_z, $\{|l,m\rangle = |1,1\rangle, |1,0\rangle, |1,-1\rangle\}$. Usando $L_x = (L_+ + L_-)/2$ e le proprietà degli operatori $L_\pm$ calcoliamo facilmente gli elementi di matrice $\langle 1,m|L_x|1,m'\rangle$, ottenendo

$$L_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Gli autovalori di tale matrice sono $L_x = \hbar, 0, -\hbar$ e i corrispondenti autovettori sono dati da

$$|L_x = \hbar\rangle = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |L_x = 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad |L_x = -\hbar\rangle = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{7}$$

e quindi

$$\begin{aligned} |1,1\rangle &= \frac{1}{2}\left(|L_x = \hbar\rangle + \sqrt{2}|L_x = 0\rangle + |L_x = -\hbar\rangle\right), \\ |1,0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|L_x = \hbar\rangle - |L_x = -\hbar\rangle\right), \\ |1,-1\rangle &= \frac{1}{2}\left(|L_x = \hbar\rangle - \sqrt{2}|L_x = 0\rangle + |L_x = -\hbar\rangle\right). \end{aligned} \tag{8}$$

Otteniamo quindi

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle = \frac{R(r)}{2}e^{-i\frac{\hbar}{I}t}\Big[&\left(\alpha e^{-ict} + \beta e^{ict}\right)|L_x = \hbar\rangle \\ &+\sqrt{2}\left(\alpha e^{-ict} - \beta e^{ict}\right)|L_x = 0\rangle + \left(\alpha e^{-ict} + \beta e^{ict}\right)|L_x = -\hbar\rangle\Big]. \end{aligned} \tag{9}$$

Quindi i valori ottenibili dalla misura di L_x per lo stato $|\psi(t)\rangle$ sono $L_x = \hbar, 0, -\hbar$, ottenuti con probabilità

$$\begin{aligned} p(L_x = \hbar) &= \frac{1}{4}\left[|\alpha|^2 + |\beta|^2 + 2\mathrm{Re}\left(\alpha\beta^\star e^{-2ict}\right)\right] = p(L_x = -\hbar), \\ p(L_x = 0) &= \frac{1}{2}\left[|\alpha|^2 + |\beta|^2 - 2\mathrm{Re}\left(\alpha\beta^\star e^{-2ict}\right)\right]. \end{aligned} \tag{10}$$

2. (i) Chiamiamo $\{|n\rangle^{(0)}\}$ la base degli autostati imperturbati,

$$|1\rangle^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |2\rangle^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |3\rangle^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{11}$$

corrispondenti agli autovalori imperturbati $E_1^{(0)} = E_2^{(0)} = \alpha$ (degenere) ed $E_3^{(0)} = 2\alpha$ (non degenere).

(ii) Diagonalizzando la matrice H troviamo gli autovalori esatti $E_1 = \alpha(1-\epsilon)$, $E_2 = \frac{\alpha}{2}(3 - \sqrt{1+4\alpha^2}) \approx \alpha(1-\epsilon^2)$ e $E_3 = \frac{\alpha}{2}(3 + \sqrt{1+4\alpha^2}) \approx \alpha(2+\epsilon^2)$.

(iii) La correzione al primo ordine per l'autovalore E_3 è nulla:

$$E_3^{(1)} = {}^{(0)}\langle 3|W|3\rangle^{(0)} = 0, \tag{12}$$

mentre la correzione al secondo ordine è data da

$$E_3^{(2)} = \sum_{k=1,2} \frac{|{}^{(0)}\langle k|W|3\rangle^{(0)}|^2}{E_3^{(0)} - E_k^{(0)}} = \alpha\epsilon^2. \tag{13}$$

$E_3^{(0)} + E_3^{(2)}$ coincide con lo sviluppo al secondo ordine di E_3 scritto sopra.

(iv) Diagonalizzanodo W nel sottospazio degenere $\{|1\rangle^{(0)}, |2\rangle^{(0)}\}$ otteniamo gli autovalori $E_1^{(1)} = -\alpha\epsilon$ ed $E_2^{(1)} = 0$. Quindi al primo ordine perturbativo $E_1 = \alpha(1-\epsilon)$ (che coincide con il risultato esatto) ed $E_2 = \alpha$ (che coincide al prim'ordine in ϵ con il risultato esatto).