FISICA QUANTISTICA II – PROVA SCRITTA DEL 29/01/2024

1. Si consideri un sistema quantistico tridimensionale, descritto dalla funzione d'onda $\psi_{lm}(r,\theta,\phi)$, che è autofunzione simultanea di L^2 (con autovalore $\hbar^2 l(l+1)$) e di L_z (con autovalore $\hbar m$).
   Calcolare valor medio e deviazione standard della proiezione del momento angolare su un generico versore $\hat{n}$, che forma un angolo α con l'asse z.

2. Una particella quantistica è vincolata a muoversi nel piano xy, con hamiltoniana

$$H = H_0 + W, \quad H_0 = \frac{P_x^2}{2m} + \frac{P_y^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 (X^2 + Y^2), \quad W = \epsilon \frac{\omega}{\hbar} L_z^2, \tag{1}$$

   con $\epsilon \ll 1$.
   (i) Assumendo la conoscenza degli autovalori e delle autofunzioni dell'oscillatore armonico unidimensionale, determinare gli autovalori di H_0, la loro degenerazione e le corrispondenti autofunzioni.
   (ii) Per il livello di H_0 ad energia $3\hbar\omega$ determinare l'effetto della perturbazione al primo ordine in ϵ per l'autovalore e all'ordine zero per le autofunzioni.
   (iii) Calcolare esattamente autovalori ed autofunzioni di H.
   (iv) Confrontare le energie esatte con quelle calcolate sopra perturbativamente.

SOLUZIONI PROVA SCRITTA DEL 29/01/2024

1. Si tratta di calcolare valore medio e deviazione standard di $\mathbf{L}\cdot\hat{\mathbf{n}}$. Scrivendo L_x e L_y come combinazione di L_+ e L_-, verifichiamo che

$$\langle\psi_{lm}|L_x|\psi_{lm}\rangle = \langle\psi_{lm}|L_y|\psi_{lm}\rangle = 0 \tag{2}$$

e quindi

$$\langle\psi_{lm}|\mathbf{L}\cdot\hat{\mathbf{n}}|\psi_{lm}\rangle = \langle\psi_{lm}|L_z\cos\alpha|\psi_{lm}\rangle = \hbar m\cos\alpha. \tag{3}$$

Inoltre

$$\langle\psi_{lm}|L_x^2|\psi_{lm}\rangle = \langle\psi_{lm}|L_y^2|\psi_{lm}\rangle = \frac{\hbar^2}{2}\,[l(l+1)-m^2], \quad \langle\psi_{lm}|L_z^2|\psi_{lm}\rangle = \hbar^2 m^2, \tag{4}$$

da cui

$$\langle|\psi_{lm}|(\mathbf{L}\cdot\hat{\mathbf{n}})^2|\psi_{lm}\rangle = \hbar^2 m^2\cos^2\alpha + \frac{\hbar^2}{2}\,[l(l+1)-m^2]\sin^2\alpha. \tag{5}$$

Infine otteniamo la deviazione standard

$$\Delta(\mathbf{L}\cdot\hat{\mathbf{n}}) = \hbar\sqrt{\frac{1}{2}\,[l(l+1)-m^2]}\sin\alpha. \tag{6}$$

2. (i) Indichiamo con $E_{n_x} = \hbar\omega\left(n_x+\frac{1}{2}\right)$ $(n_x = 0,1,2,...)$ e con $|n_x\rangle$ gli autovalori e gli autiovettori di $H_x = \frac{P_x^2}{2m}+\frac{1}{2}\,m\omega^2X^2$ e analogamente con $E_{n_y} = \hbar\omega\left(n_y+\frac{1}{2}\right)$ $(n_y = 0,1,2,...)$ e con $|n_y\rangle$ gli autovalori e gli autovettori di $H_y = \frac{P_y^2}{2m}+\frac{1}{2}\,m\omega^2y^2$. Otteniamo quindi gli autovalori e gli autovettori di $H = H_x+H_y$, $E_n = \hbar\omega(n+1)$ $(n = 0,1,2,...)$ e $|n_x,n_y\rangle$, con $n_x+n_y = n$. Questo implica che la degenerazione del livello E_n è data da $g_n = n+1$.

   (ii) Per il livello indicato nel testo abbiamo $n = 2$ e quindi la degenerazione $g_2 = 3$. Scriviamo la matrice associata alla perturbazione nella base $\{|2,0\rangle,|1,1\rangle,|0,2\rangle\}$ dell'autospazio di H_0 considerato. Introducendo gli operatori di creazione e distruzione,

$$X = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a_x+a_x^\dagger), \quad P_x = -i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}(a_x-a_x^\dagger), \quad N_x = a_x^\dagger a_x, \tag{7}$$

e analogamente per Y, P_y e N_y, otteniamo

$$L_z = XP_y - YP_x = -i\hbar(a_x^\dagger a_y - a_x a_y^\dagger), \tag{8}$$

da cui

$$L_z^2 = -\hbar^2[(a_x^\dagger)^2a_y^2 + a_x^2(a_y^\dagger)^2 - N_x - N_y - 2N_xN_y]. \tag{9}$$

Questo porta nell'autospazio considerato alla matrice

$$W = \epsilon\hbar\omega\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Diagonalizzando la matrice W otteniamo gli autovalori 0 (non degenere) e $4\epsilon\hbar\omega$ (con degenerazione 2), che sono anche le correzioni al primo ordine dell'energia imperturbata, e i corrispondenti autostati $\frac{1}{\sqrt{2}}(|2,0\rangle + |0,2\rangle)$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(|2,0\rangle - |0,2\rangle)$ e $|1,1\rangle$.

(iii) Per ottenere la soluzione esatta introduciamo gli operatori di distruzione di quanti circolari,

$$a_{l,r} = \frac{a_x \pm i a_y}{\sqrt{2}}, \tag{11}$$

e i corrispondenti operatori numero,

$$N_{l,r} = a^\dagger_{l,r} a_{l,r}. \tag{12}$$

In tal modo $H_0 = \hbar\omega(N_r + N_l + 1)$, $L_z = \hbar(N_r - N_l)$ e quindi

$$H = \hbar\omega(N_r + N_l + 1) + \epsilon\hbar\omega(N_r - N_l)^2, \tag{13}$$

che ha come autovalori

$$E_{n_r,n_l} = \hbar\omega(n_r + n_l + 1) + \epsilon\hbar\omega(n_r - n_l)^2, \tag{14}$$

con $n_{l,r} = 0, 1, 2, ...$, e i corrispondenti autovettori $|n_r, n_l\rangle$.

(iv) Considerando i livelli energetici per cui $n_r + n_l = 2$ otteniamo $E_{2,0} = E_{0,2} = 3\hbar\omega + 4\epsilon\hbar\omega$, $E_{1,1} = 3\hbar\omega$, che coincidono con le energie ottenute al punto (ii) in modo perturbativo.