1. Ricordiamo innanzitutto due risultati. Il primo è il teorema di Sylvester.

   Teorema 1 (Sylvester). *Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, di dimensione* $\dim V = n$*, dotato di un prodotto scalare $\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$.*
   Allora esistono tre numeri naturali r, s, t con questa proprietà: «ogni base ortogonale $\{u_1, ..., u_n\}$ di V[1] possiede esattamente r vettori u_i tali che $\langle u_i, u_i \rangle > 0$, esattamente s vettori u_i tali che $\langle u_i, u_i \rangle = 0$ ed esattamente t vettori u_i tali che $\langle u_i, u_i \rangle < 0$».

   r si chiama indice di positività di $\langle , \rangle$,

   s si chiama indice di nullità di $\langle , \rangle$,

   t si chiama indice di negatività di $\langle , \rangle$.

   Notiamo che $r + s + t = n$.

   In base al teorema di Sylvester, per calcolare r, s, t basta costruire una base ortogonale $\{u_1, ..., u_n\}$ di V e calcolare i prodotti scalari $\langle u_1, u_1 \rangle, ..., \langle u_n, u_n \rangle$. Il secondo risultato che richiamiamo è il metodo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt, che serve appunto per trovare una base ortogonale di V.

   Proposizione 1 (metodo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt). *Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, di dimensione* $\dim V = n$*, dotato di un prodotto scalare $\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$.*
   Scegliamo una base $\{v_1, ..., v_n\}$ di V e supponiamo che nella seguente costruzione

$$\begin{aligned}
u_1 &= v_1 \\
u_2 &= v_2 - \frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 \\
u_3 &= v_3 - \frac{\langle v_3, u_2 \rangle}{\langle u_2, u_2 \rangle} u_2 - \frac{\langle v_3, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 \\
&\vdots \\
u_n &= v_n - \frac{\langle v_n, u_{n-1} \rangle}{\langle u_{n-1}, u_{n-1} \rangle} u_{n-1} - ... - \frac{\langle v_n, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1
\end{aligned} \tag{E.1}$$

   *(1) **non capitano mai** coefficienti della forma $\frac{c}{0}$ con $c \neq 0$,*

   (2) qualora incontrassimo coefficienti della forma $\frac{0}{0}$ li poniamo uguali a 0 e procediamo.

   Allora i vettori $\{u_1, ..., u_n\}$ costruiti in (E.1) *sono una base di V ortogonale rispetto a $\langle , \rangle$.*

   In base alla proposizione precedente, il metodo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt produce sempre una base ortogonale $\{u_1, ..., u_n\}$ partendo da una base qualsiasi $\{v_1, ..., v_n\}$, **a patto che esso riesca ad arrivare fino in fondo senza incontrare coefficienti del tipo $\frac{c}{0}$ con $c \neq 0$.**[2] Se invece si incontrano coefficienti della forma $\frac{c}{0}$, con $c \neq 0$, si deve ricominciare da capo scegliendo una nuova base $\{v_1, ..., v_n\}$ di V e provando a costruire $\{u_1, ..., u_n\}$ partendo da questa nuova base.

   Risolviamo adesso l'esercizio. È assegnato un prodotto scalare $\langle , \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Vogliamo determinare con il metodo di Gram-Schmidt una base di $\mathbb{R}^2$ ortogonale rispetto a $\langle , \rangle$, partendo dalla base

[1] S'intende ortogonale rispetto a $\langle , \rangle$.
[2] I coefficienti della forma $\frac{0}{0}$ non costituiscono un problema perché li poniamo uguali a 0 e procediamo.

canonica $\{e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$. Si ha

$$\begin{aligned} u_1 &= e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ u_2 &= e_2 - \frac{\langle e_2, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 = e_2 - \frac{1}{1} e_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Il metodo di Gram-Schmidt è arrivato fino in fondo senza problemi, dunque sappiamo dalla Proposizione 1 che $\{u_1, u_2\}$ è una base ortogonale di $\mathbb{R}^2$ rispetto a $\langle , \rangle$.[3] Siccome

$$\langle u_1, u_1 \rangle = 1 > 0,$$

$$\langle u_2, u_2 \rangle = 1 > 0,$$

concludiamo che l'indice di positività di $\langle , \rangle$ è $r = 2$, l'indice di nullità è $s = 0$ e l'indice di negatività è $t = 0$. In particolare, il prodotto scalare $\langle , \rangle$ è definito positivo perché l'indice di positività è massimo (uguale alla dimensione di $\mathbb{R}^2$).

2. È assegnato il prodotto scalare $\langle , \rangle : \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$. Vogliamo determinare con il metodo di Gram-Schmidt una base di $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ ortogonale rispetto a $\langle , \rangle$, partendo dalla base canonica di $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$, che è $\{E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$. Si ha

$$\begin{aligned} U_1 &= E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ U_2 &= E_2 - \frac{\langle E_2, U_1 \rangle}{\langle U_1, U_1 \rangle} U_1 = E_2 - \frac{0}{1} U_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ U_3 &= E_3 - \frac{\langle E_3, U_2 \rangle}{\langle U_2, U_2 \rangle} U_2 - \frac{\langle E_3, U_1 \rangle}{\langle U_1, U_1 \rangle} U_1 = E_3 - \frac{0}{1} U_2 - \frac{1}{1} U_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ U_4 &= E_4 - \frac{\langle E_4, U_3 \rangle}{\langle U_3, U_3 \rangle} U_3 - \frac{\langle E_4, U_2 \rangle}{\langle U_2, U_2 \rangle} U_2 - \frac{\langle E_4, U_1 \rangle}{\langle U_1, U_1 \rangle} U_1 = E_4 - \frac{0}{0} U_3 - \frac{1}{1} U_2 - \frac{0}{1} U_1 = E_4 - 0\, U_3 - 1\, U_2 - 0\, U_1 \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Il metodo di Gram-Schmidt è arrivato fino in fondo senza problemi, dunque sappiamo dalla Proposizione 1 che $\{U_1, U_2, U_3, U_4\}$ è una base ortogonale di $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ rispetto a $\langle , \rangle$.[4] Siccome

$$\begin{aligned} \langle U_1, U_1 \rangle &= 1 > 0, \\ \langle U_2, U_2 \rangle &= 1 > 0, \\ \langle U_3, U_3 \rangle &= 0, \\ \langle U_4, U_4 \rangle &= 0, \end{aligned}$$

concludiamo che l'indice di positività di $\langle , \rangle$ è $r = 2$, l'indice di nullità è $s = 2$ e l'indice di negatività è $t = 0$. In particolare, il prodotto scalare $\langle , \rangle$ è degenere, perché l'indice di nullità è positivo.

[3] In effetti, un calcolo diretto mostra che $\langle u_1, u_2 \rangle = 0$.

[4] In effetti, un calcolo diretto mostra che $\langle U_1, U_2 \rangle = \langle U_1, U_3 \rangle = \langle U_1, U_4 \rangle = \langle U_2, U_3 \rangle = \langle U_2, U_4 \rangle = \langle U_3, U_4 \rangle = 0$.

3. È assegnato il prodotto scalare $\langle , \rangle : \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(AB)$. Vogliamo determinare con il metodo di Gram-Schmidt una base di $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ ortogonale rispetto a $\langle , \rangle$, partendo dalla base canonica $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ di $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$. Si ha

$$\begin{aligned}
U_1 &= E_1\\
U_2 &= E_2 - \frac{\langle E_2, U_1\rangle}{\langle U_1, U_1\rangle} U_1 = E_2 - \frac{0}{1} U_1 = E_2\\
U_3 &= E_3 - \frac{\langle E_3, U_2\rangle}{\langle U_2, U_2\rangle} U_2 - \frac{\langle E_3, U_1\rangle}{\langle U_1, U_1\rangle} U_1 = E_3 - \frac{1}{0} U_2 - \frac{0}{1} U_1 \qquad \textbf{stop}
\end{aligned}$$

A causa del coefficiente $\frac{1}{0}$ non possiamo procedere con il metodo di Gram-Schmidt. Proviamo allora di nuovo partendo da un'altra base di $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$, ad esempio dalla base $\{W_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, W_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, W_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, W_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\}$.[5] Si ha

$$\begin{aligned}
U_1 &= W_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\\
U_2 &= W_2 - \frac{\langle W_2, U_1\rangle}{\langle U_1, U_1\rangle} U_1 = W_2 - \frac{3}{4} U_1 = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & -3/4 \end{pmatrix}\\
U_3 &= W_3 - \frac{\langle W_3, U_2\rangle}{\langle U_2, U_2\rangle} U_2 - \frac{\langle W_3, U_1\rangle}{\langle U_1, U_1\rangle} U_1 = W_3 - \frac{1/2}{3/4} U_2 - \frac{2}{4} U_1 = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -2/3 & 0 \end{pmatrix}\\
U_4 &= W_4 - \frac{\langle W_4, U_3\rangle}{\langle U_3, U_3\rangle} U_3 - \frac{\langle W_4, U_2\rangle}{\langle U_2, U_2\rangle} U_2 - \frac{\langle W_4, U_1\rangle}{\langle U_1, U_1\rangle} U_1 = W_4 - \frac{1/3}{-1/3} U_3 - \frac{1/4}{3/4} U_2 - \frac{1}{4} U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Questa volta il metodo di Gram-Schmidt è arrivato fino in fondo, dunque sappiamo dalla Proposizione 1 che $\{U_1, U_2, U_3, U_4\}$ è una base ortogonale di $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ rispetto a $\langle , \rangle$ (si consiglia di verificare per esercizio che $\{U_1, U_2, U_3, U_4\}$ è davvero ortogonale rispetto a $\langle , \rangle$). Siccome

$$\begin{aligned}
\langle U_1, U_1\rangle &= 4 > 0,\\
\langle U_2, U_2\rangle &= 3/4 > 0,\\
\langle U_3, U_3\rangle &= -1/3 < 0,\\
\langle U_4, U_4\rangle &= 1 > 0,
\end{aligned}$$

concludiamo che l'indice di positività di $\langle , \rangle$ è $r = 3$, l'indice di nullità è $s = 0$ e l'indice di negatività è $t = 1$. In particolare, il prodotto scalare $\langle , \rangle$ è non degenere (perché l'indice di nullità è 0), ma non è definito positivo (perché l'indice di positività non è massimo).

4. Data una matrice **simmetrica** $C \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$, la forma bilineare simmetrica (= prodotto scalare) rappresentato da C è

$$\langle , \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad \langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \rangle = (x_1 \ \cdots \ x_n) C \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij} x_i y_j. \tag{E.2}$$

[5] Questa è davvero una base di $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$, perché $\dim \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) = 4$ e W_1, W_2, W_3, W_4 sono 4 elementi di $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ linearmente indipendenti, infatti

$$aW_1 + bW_2 + cW_3 + dW_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a+b+c+d & a+b+c \\ a+b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a = 0, b = 0, c = 0, d = 0.$$

Nel nostro caso, il prodotto scalare rappresentato da A è

$$\langle , \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad \langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \rangle = (x\ y\ z) \begin{pmatrix} 1 & 0 & k^2 \\ 0 & k & 0 \\ k^2 & 0 & k^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$
$$= xx' + k^2xz' + kyy' + k^2zx' + k^3zz'.$$

Dobbiamo determinare indice di positività e nullità di questo prodotto scalare. Vediamo due soluzioni.

Soluzione 1. Come negli esercizi precedenti, vogliamo determinare una base di $\mathbb{R}^3$ ortogonale rispetto a $\langle , \rangle$ usando il metodo di Gram-Schmidt e partendo dalla base canonica $\{e_1, e_2, e_3\}$ di $\mathbb{R}^3$. Si ha

$$\begin{aligned} u_1 &= e_1 \\ u_2 &= e_2 - \frac{\langle e_2, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 = e_2 - \frac{0}{1} u_1 = e_2 \\ u_3 &= e_3 - \frac{\langle e_3, u_2 \rangle}{\langle u_2, u_2 \rangle} u_2 - \frac{\langle e_3, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 = e_3 - \frac{0}{k} u_2 - \frac{k^2}{1} u_1 = e_3 - k^2 e_1 \end{aligned}$$

(l'ultima uguaglianza vale sempre, anche nel caso in cui $k = 0$, perché ricordiamo che i coefficienti della forma $\frac{0}{0}$ li poniamo uguali a 0, vedere la Proposizione 1). Il metodo di Gram-Schmidt è arrivato fino in fondo senza problemi, dunque sappiamo dalla Proposizione 1 che $\{u_1, u_2, u_3\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$ ortogonale rispetto a $\langle , \rangle$ (si consiglia di verificare per esercizio che $\{u_1, u_2, u_3\}$ è davvero ortogonale rispetto a $\langle , \rangle$: $\langle u_1, u_2 \rangle = \langle u_1, u_3 \rangle = \langle u_2, u_3 \rangle = 0$). Si ha

$$\begin{aligned} \langle u_1, u_1 \rangle &= 1 > 0, \\ \langle u_2, u_2 \rangle &= k, \\ \langle u_3, u_3 \rangle &= k^3(1-k). \end{aligned}$$

Denotando con r, s, t rispettivamente l'indice di positività, nullità e negatività di $\langle , \rangle$, dalla Figura 1 vediamo che

- se $k < 0$ allora $r = 1,\ s = 0,\ t = 2$;
- se $k = 0$ allora $r = 1,\ s = 2,\ t = 0$;
- se $0 < k < 1$ allora $r = 3,\ s = 0,\ t = 0$; $\qquad (*****)$
- se $k = 1$ allora $r = 2,\ s = 1,\ t = 0$;
- se $k > 1$ allora $r = 2,\ s = 0,\ t = 1$.

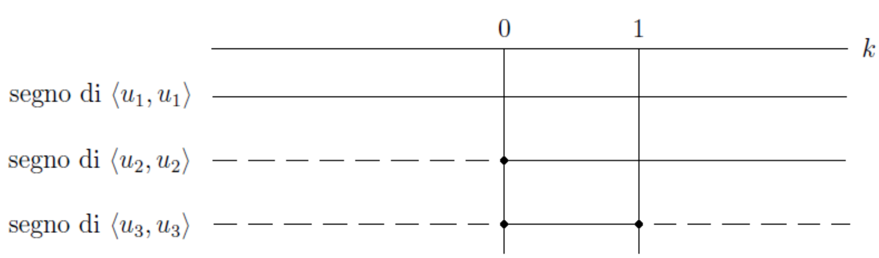

Figura 1: segno di $\langle u_1, u_1 \rangle$, $\langle u_2, u_2 \rangle$, $\langle u_3, u_3 \rangle$ a seconda del valore di k.

Soluzione 2. Per i prodotti scalari rappresentati da una matrice simmetrica $C \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ vale il seguente risultato.

Proposizione 2. *Sia $C \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ una matrice simmetrica e sia $\langle , \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ il prodotto scalare rappresentato da C, dato dalla* (E.2). *Siano r, s, t rispettivamente l'indice di positività, nullità e negatività di $\langle , \rangle$. Siano infine $\lambda_1, ..., \lambda_n$ **tutti** gli autovalori di C.*[6] *Allora $\lambda_1, ..., \lambda_n$ sono tutti reali e*

- $r =$ numero degli autovalori positivi di $C =$ numero degli indici $j \in \{1, ..., n\}$ tali che $\lambda_j > 0$;
- $s =$ numero degli autovalori nulli di $C =$ numero degli indici $j \in \{1, ..., n\}$ tali che $\lambda_j = 0$;
- $t =$ numero degli autovalori negativi di $C =$ numero degli indici $j \in \{1, ..., n\}$ tali che $\lambda_j < 0$.

Dimostrazione. Sia $C \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ una matrice simmetrica e sia $\langle , \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ il prodotto scalare rappresentato da C. Oltre a $\langle , \rangle$, su $\mathbb{R}^n$ è definito anche il prodotto scalare classico $\cdot$, che è **definito positivo** ed è dato da

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = {}^t\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = (x_1 \ \cdots \ x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \qquad \forall \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Consideriamo l'applicazione lineare definita da C su $\mathbb{R}^n$, ossia l'applicazione lineare

$$C : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \qquad C \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + ... + c_{1n}x_n \\ \vdots \\ c_{n1}x_1 + c_{n2}x_2 + ... + c_{nn}x_n \end{pmatrix}.$$

C è un'applicazione lineare **simmetrica rispetto a $\cdot$** perché, per ogni $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, si ha

$$\begin{aligned} \left[C \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} &= {}^t\left[C \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = (x_1 \ \cdots \ x_n)\, {}^tC \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \\ &= (x_1 \ \cdots \ x_n) C \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \text{(perché la matrice } C \text{ è simmetrica)} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \cdot \left[C \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right]. \end{aligned}$$

Quindi, per il teorema spettrale, esiste una base di $\mathbb{R}^n$ **ortogonale rispetto a $\cdot$** e costituita da autovettori di C. Questo significa che gli autovalori di C sono tutti reali, C è diagonalizzabile ed esiste una base $\{u_1, ..., u_n\}$ di $\mathbb{R}^n$ ortogonale rispetto a $\cdot$ tale che $Cu_i = \lambda_i u_i \ \ \forall i = 1, ..., n$.

Ma la base $\{u_1, ..., u_n\}$ è **ortogonale anche rispetto a $\langle , \rangle$** perché, $\forall i, j = 1, ..., n$ con $i \neq j$, si ha

$$\langle u_i, u_j \rangle = {}^tu_i \, C u_j = {}^tu_i(\lambda_j u_j) = \lambda_j \, {}^tu_i u_j = \lambda_j (u_i \cdot u_j) = 0,$$

[6] Cioè tutte le radici del polinomio caratteristico di C, ciascuna delle quali compare nella sequenza $\lambda_1, ..., \lambda_n$ un numero di volte pari alla sua molteplicità algebrica.

dove l'ultima uguaglianza vale perché $u_1, ..., u_n$ sono ortogonali rispetto a $\cdot$

Pertanto, possiamo usare la base ortogonale $\{u_1, ..., u_n\}$ per calcolare gli indici r, s, t relativi al prodotto scalare $\langle , \rangle$. Siccome

$$\langle u_i, u_i \rangle = {}^t u_i C u_i = {}^t u_i (\lambda_i u_i) = \lambda_i \, {}^t u_i u_i = \lambda_i (u_i \cdot u_i) = \lambda_i \|u_i\|^2, \qquad \forall i = 1, ..., n,$$

si deduce che il segno di $\langle u_i, u_i \rangle$ coincide con il segno di λ_i per tutti gli $i = 1, ..., n$ e dunque la proposizione è dimostrata (ossia: r è il numero di autovalori positivi di C, s è il numero di autovalori nulli di C, t è il numero di autovalori negativi di C). □

Applichiamo la Proposizione 2 al nostro caso. Il polinomio caratteristico di A è

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & k^2 \\ 0 & k-\lambda & 0 \\ k^2 & 0 & k^3-\lambda \end{vmatrix} = (k-\lambda)[(1-\lambda)(k^3-\lambda) - k^4] = (k-\lambda)[\lambda^2 - (k^3+1)\lambda + k^3 - k^4],$$

per cui gli autovalori di A sono

$$\lambda_1 = k, \quad \lambda_2 = \frac{k^3+1+\sqrt{(k^3+1)^2 - 4k^3(1-k)}}{2}, \quad \lambda_3 = \frac{k^3+1-\sqrt{(k^3+1)^2 - 4k^3(1-k)}}{2}.$$

$\forall k \in \mathbb{R}$ fissato, la matrice A è simmetrica e quindi $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$. Pertanto deve essere[7]

$$(k^3+1)^2 - 4k^3(1-k) \geq 0, \quad \forall k \in \mathbb{R}. \tag{E.3}$$

Studiamo il segno di $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ a seconda del valore di k.

- Per λ_1 si ha

$$\lambda_1 > 0 \Leftrightarrow k > 0.$$
$$\lambda_1 = 0 \Leftrightarrow k = 0.$$

- Per λ_2 si ha

$$\begin{aligned} \lambda_2 > 0 &\Leftrightarrow k^3 + 1 + \sqrt{(k^3+1)^2 - 4k^3(1-k)} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{(k^3+1)^2 - 4k^3(1-k)} > -(k^3+1) \\ &\Leftrightarrow -(k^3+1) < 0 \ \vee \ \begin{cases} -(k^3+1) \geq 0 \\ (k^3+1)^2 - 4k^3(1-k) > (k^3+1)^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow k > -1 \ \vee \ \begin{cases} k \leq -1 \\ 4k^3(1-k) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow k > -1 \ \vee \ \begin{cases} k \leq -1 \\ k < 0 \ \vee \ k > 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow k > -1 \ \vee \ k \leq -1 \Leftrightarrow k \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

per cui λ_2 è sempre positivo $\forall k \in \mathbb{R}$.

[7] In questo caso semplice, si può fare anche una verifica diretta della (E.3):

$$(k^3+1)^2 - 4k^3(1-k) = k^6 + 2k^3 + 1 - 4k^3 + 4k^4 = k^6 - 2k^3 + 1 + 4k^4 = (k^3-1)^2 + 4k^4 \geq 0, \quad \forall k \in \mathbb{R}.$$

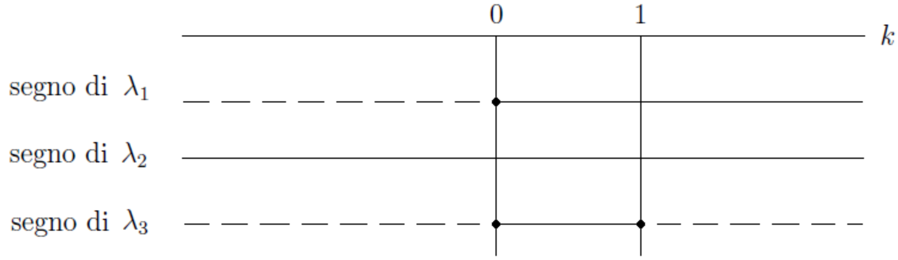

Figura 2: segno di $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ a seconda del valore di k.

✸ Per λ_3 si ha

$$\lambda_3 > 0 \Leftrightarrow k^3+1-\sqrt{(k^3+1)^2-4k^3(1-k)} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{(k^3+1)^2-4k^3(1-k)} < k^3+1$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} k^3+1>0 \\ (k^3+1)^2-4k^3(1-k) < (k^3+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k>-1 \\ 4k^3(1-k)>0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} k>-1 \\ 0<k<1 \end{cases} \Leftrightarrow 0<k<1,$$
$$\lambda_3 = 0 \Leftrightarrow k^3+1-\sqrt{(k^3+1)^2-4k^3(1-k)} = 0 \Leftrightarrow k^3+1 = \sqrt{(k^3+1)^2-4k^3(1-k)}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} k^3+1 \geq 0 \\ (k^3+1)^2 = (k^3+1)^2-4k^3(1-k) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \geq -1 \\ 4k^3(1-k) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow k=0 \ \vee \ k=1.$$

Denotando con r, s, t rispettivamente l'indice di positività, nullità e negatività del nostro prodotto scalare $\langle , \rangle$, dalla Figura 2 (e dalla Proposizione 2) otteniamo le stesse conclusioni $(*****)$ a cui siamo giunti nella prima soluzione.

5. Innanzitutto occorre stabilire se consideriamo S_θ come applicazione lineare da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$ o da $\mathbb{C}^2$ in $\mathbb{C}^2$. Siccome non viene specificato niente nel testo dell'esercizio, **dobbiamo** considerare S_θ come applicazione lineare da $\mathbb{C}^2$ in $\mathbb{C}^2$, ossia[8]

$$S_\theta : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2, \qquad S_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \cdot x + \sin\theta \cdot y \\ \sin\theta \cdot x - \cos\theta \cdot y \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo ora autovalori e autospazi di S_θ.

Il polinomio caratteristico di S_θ è

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} \cos\theta-\lambda & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta-\lambda \end{vmatrix} = (\cos\theta-\lambda)(-\cos\theta-\lambda)-\sin^2\theta = \lambda^2-\cos^2\theta-\sin^2\theta = \lambda^2-1,$$

per cui gli autovalori di S_θ sono 1 e -1.

L'autospazio V_1 relativo all'autovalore 1 è

$$V_1 = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 : S_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\} = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 : \begin{pmatrix} \cos\theta \cdot x + \sin\theta \cdot y \\ \sin\theta \cdot x - \cos\theta \cdot y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\}$$
$$= \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 : \begin{cases} \cos\theta \cdot x + \sin\theta \cdot y = x \\ \sin\theta \cdot x - \cos\theta \cdot y = y \end{cases}\} = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 : \begin{cases} (\cos\theta-1)\cdot x + \sin\theta \cdot y = 0 \\ \sin\theta \cdot x - (\cos\theta+1)\cdot y = 0 \end{cases}\},$$

da cui deduciamo quanto segue.

[8] Questa è una convenzione standard: quando è data una matrice $n \times n$ A e si dice di calcolare autovalori / autovettori / autospazi di A senza altre specificazioni, bisogna considerare A come applicazione lineare da $\mathbb{C}^n$ in $\mathbb{C}^n$.

- Se $\cos\theta - 1 \neq 0$ (cioè se $\theta \notin \{k\,2\pi : k \in \mathbb{Z}\}$), allora possiamo applicare Gauss sommando alla seconda riga la prima moltiplicata per $-\frac{\sin\theta}{\cos\theta - 1}$ e in tal modo otteniamo

$$
\begin{aligned}
V_1 &= \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 : \left\{\begin{array}{l} (\cos\theta - 1)\cdot x + \sin\theta \cdot y = 0 \\ \left[-\dfrac{\sin^2\theta}{\cos\theta - 1} - (\cos\theta + 1)\right]\cdot y = 0 \end{array}\right. \} \\
&= \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 : \left\{\begin{array}{l} (\cos\theta - 1)\cdot x + \sin\theta \cdot y = 0 \\ 0 = 0 \end{array}\right. \} = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 : x = \frac{\sin\theta}{1 - \cos\theta} y\} \\
&= \{\begin{pmatrix} \dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta} y \\ y \end{pmatrix} : y \in \mathbb{C}\} = \operatorname{span}\{\begin{pmatrix} \dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta} \\ 1 \end{pmatrix}\}.
\end{aligned}
$$

- Se $\cos\theta - 1 = 0$ (cioè se $\theta \in \{k\,2\pi : k \in \mathbb{Z}\}$), allora

$$
V_1 = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 : \left\{\begin{array}{l} 0 = 0 \\ -2y = 0 \end{array}\right. \} = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 : y = 0\} = \{\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{C}\} = \operatorname{span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}.
$$

L'autospazio V_{-1} relativo all'autovalore -1 è

$$
\begin{aligned}
V_{-1} &= \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 : S_\theta\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\} = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 : \begin{pmatrix} \cos\theta\cdot x + \sin\theta\cdot y \\ \sin\theta\cdot x - \cos\theta\cdot y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}\} \\
&= \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 : \left\{\begin{array}{l} \cos\theta\cdot x + \sin\theta\cdot y = -x \\ \sin\theta\cdot x - \cos\theta\cdot y = -y \end{array}\right. \} = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 : \left\{\begin{array}{l} (\cos\theta + 1)\cdot x + \sin\theta\cdot y = 0 \\ \sin\theta\cdot x - (\cos\theta - 1)\cdot y = 0 \end{array}\right. \},
\end{aligned}
$$

da cui deduciamo quanto segue.

- Se $\cos\theta + 1 \neq 0$ (cioè se $\theta \notin \{\pi + k\,2\pi : k \in \mathbb{Z}\}$), allora possiamo applicare Gauss sommando alla seconda riga la prima moltiplicata per $-\frac{\sin\theta}{\cos\theta + 1}$ e in tal modo otteniamo

$$
\begin{aligned}
V_{-1} &= \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 : \left\{\begin{array}{l} (\cos\theta + 1)\cdot x + \sin\theta \cdot y = 0 \\ \left[-\dfrac{\sin^2\theta}{\cos\theta + 1} - (\cos\theta - 1)\right]\cdot y = 0 \end{array}\right. \} \\
&= \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 : \left\{\begin{array}{l} (\cos\theta + 1)\cdot x + \sin\theta \cdot y = 0 \\ 0 = 0 \end{array}\right. \} = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 : x = -\frac{\sin\theta}{1 + \cos\theta} y\} \\
&= \{\begin{pmatrix} -\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta} y \\ y \end{pmatrix} : y \in \mathbb{C}\} = \operatorname{span}\{\begin{pmatrix} -\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta} \\ 1 \end{pmatrix}\}.
\end{aligned}
$$

- Se $\cos\theta + 1 = 0$ (cioè se $\theta \in \{\pi + k\,2\pi : k \in \mathbb{Z}\}$), allora

$$
V_{-1} = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 : \left\{\begin{array}{l} 0 = 0 \\ 2y = 0 \end{array}\right. \} = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 : y = 0\} = \{\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{C}\} = \operatorname{span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}.
$$

Osservazione 1. In questo caso (in cui il polinomio caratteristico $p(\lambda)$ di S_θ possiede **solo radici reali**), la soluzione dell'esercizio con la scelta di considerare S_θ come applicazione lineare da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$, ovvero

$$
S_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad S_\theta\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta\cdot x + \sin\theta\cdot y \\ \sin\theta\cdot x - \cos\theta\cdot y \end{pmatrix},
$$

coincide esattamente con la soluzione precedente a patto di sostituire tutte le $\mathbb{C}$ in colore blu con delle $\mathbb{R}$ (si consiglia di rileggere l'esercizio con le $\mathbb{C}$ blu sostituite da $\mathbb{R}$).

In generale, le cose possono **cambiare sostanzialmente** se una matrice $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ viene considerata come applicazione lineare da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^n$ piuttosto che da $\mathbb{C}^n$ in $\mathbb{C}^n$. Si consiglia a questo proposito di risolvere il seguente esercizio: trovare autovalori e autospazi della matrice $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, prima considerando R come applicazione lineare da $\mathbb{C}^2$ in $\mathbb{C}^2$ e poi considerando R come applicazione lineare da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$. [Soluzione: l'applicazione lineare

$$R : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2, \qquad R\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

ha gli autovalori $\mathrm{i}, -\mathrm{i}$ con corrispondenti autospazi $V_{\mathrm{i}} = \{x\begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix} : x \in \mathbb{C}\} = \mathrm{span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix}\}$ e $V_{-\mathrm{i}} = \{x\begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix} : x \in \mathbb{C}\} = \mathrm{span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}\}$; l'applicazione lineare

$$R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad R\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

non ha autovalori (e quindi nemmeno autovettori/autospazi).]

Come abbiamo accennato prima di risolvere l'esercizio, quando si parla genericamente di autovalori / autovettori / autospazi di una matrice $n \times n$ A, questa deve essere considerata come applicazione lineare da $\mathbb{C}^n$ in $\mathbb{C}^n$. In particolare quindi, parlando genericamente di autovalori di una matrice A, si intendono **tutte** le radici del polinomio caratteristico di A (che sono appunto gli autovalori dell'applicazione lineare $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$). Nel caso dell'esercizio proposto, quando si parla di "autovalori di R" (senza altre specificazioni), gli autovalori di R sono i e $-\mathrm{i}$.

6. In questo caso viene specificato che A è definita sul corpo complesso, quindi consideriamo A come applicazione lineare da $\mathbb{C}^3$ in $\mathbb{C}^3$:

$$A : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3, \qquad A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}z \\ y \\ \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}z \end{pmatrix}.$$

(a) Il polinomio caratteristico di A è

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} - \lambda & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} - \lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \lambda\right)^2 + \frac{1}{4}\right] = (1-\lambda)\left(\lambda^2 - \sqrt{3}\lambda + 1\right),$$

per cui gli autovalori di A sono $1, \frac{\sqrt{3}+\mathrm{i}}{2}, \frac{\sqrt{3}-\mathrm{i}}{2}$.

(b) Siccome A possiede tre autovalori distinti, A è diagonalizzabile.

Osservazione 2. Se consideriamo A come applicazione lineare da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$, ossia

$$A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}z \\ y \\ \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}z \end{pmatrix},$$

allora A non è diagonalizzabile, perché non tutte le radici del polinomio caratteristico $p(\lambda)$ di A sono reali.

- Il fatto che $A : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ è diagonalizzabile si esprime dicendo che **la matrice A è diagonalizzabile su** $\mathbb{C}$.
- Il fatto che $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ non è diagonalizzabile si esprime dicendo che **la matrice A non è diagonalizzabile su** $\mathbb{R}$.

7. Siccome si parla di calcolare gli autovalori di A senza altre specificazioni, si considera A come applicazione lineare da $\mathbb{C}^3$ in $\mathbb{C}^3$.

   (a) Il polinomio caratteristico di A è

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 9 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 9 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)[(3-\lambda)(4-\lambda)-2] = (2-\lambda)(\lambda^2-7\lambda+10) = (2-\lambda)^2(5-\lambda),$$

   per cui gli autovalori di A sono 2 (con molteplicità algebrica 2) e 5 (con molteplicità algebrica 1).
   L'autospazio V_2 relativo all'autovalore 2 è

$$V_2 = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 : A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\} = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 : \begin{pmatrix} 3x+9y+2z \\ 2y \\ x+9y+4z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}\}$$
$$= \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 : \begin{cases} x+9y+2z=0 \\ 0=0 \\ x+9y+2z=0 \end{cases}\} = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 : x = -9y-2z\}$$
$$= \{\begin{pmatrix} -9y-2z \\ y \\ z \end{pmatrix} : y,z \in \mathbb{C}\} = \{y\begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : y,z \in \mathbb{C}\} = \operatorname{span}\{\begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$$

   per cui, siccome $\begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sono linearmente indipendenti (non sono uno multiplo dell'altro), essi sono una base di V_2 e $\dim V_2 = 2$.
   L'autospazio V_5 relativo all'autovalore 5 è

$$V_5 = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 : A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\} = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 : \begin{pmatrix} 3x+9y+2z \\ 2y \\ x+9y+4z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x \\ 5y \\ 5z \end{pmatrix}\}$$
$$= \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 : \begin{cases} -2x+9y+2z=0 \\ y=0 \\ x+9y-z=0 \end{cases}\} = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 : \begin{cases} -2x+2z=0 \\ y=0 \\ x-z=0 \end{cases}\}$$
$$= \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 : x = z,\, y = 0\} = \{\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ x \end{pmatrix} : x \in \mathbb{C}\} = \operatorname{span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$$

   per cui una base di V_5 è $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\dim V_5 = 1$.

   (b) Siccome ogni autovalore di A ha molteplicità algebrica uguale a quella geometrica, A è diagonalizzabile. Inoltre, avendo a disposizione gli autovalori di A e una base per ogni autospazio, c'è una procedura standard per trovare una trasformazione di similitudine che riduce A in forma diagonale, ovvero la seguente.

- Si forma la matrice P che ha come colonne i vettori di base degli autospazi, cioè i vettori $\begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (non importa in quale ordine). Ad esempio, sia

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La teoria ci dice che P è sicuramente invertibile (infatti $\det(P) = 3 \neq 0$).

- Si forma la matrice diagonale D che ha sulla diagonale gli autovalori di A organizzati in modo che

  d_{11} è autovalore di A corrispondente alla prima colonna di P;

  d_{22} è autovalore di A corrispondente alla seconda colonna di P;

  d_{33} è autovalore di A corrispondente alla terza colonna di P.

  Nel nostro caso,

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- A questo punto, la teoria ci dice che $A = PDP^{-1}$ (si consiglia di verificare questo risultato andando a calcolare esplicitamente l'inversa di P e sviluppando il prodotto PDP^{-1}).[9] Moltiplicando l'equazione $A = PDP^{-1}$ a sinistra per P^{-1} e a destra per P, si ottiene $P^{-1}AP = D$ e dunque $A \mapsto P^{-1}AP$ è una trasformazione di similitudine che riduce A in forma diagonale.

(c) Siccome $A = PDP^{-1}$, si ha

$$A^2 = AA = PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1}, \qquad A^3 = A^2A = PD^2P^{-1}PDP^{-1} = PD^3P^{-1}$$

e in generale

$$A^n = PD^nP^{-1} = P \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 5^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} P^{-1}$$

(anche in questo caso, come esercizio, si consiglia, dopo aver calcolato P^{-1} esplicitamente, di sviluppare il prodotto PD^nP^{-1} ottenendo così una scrittura "sintetica" per A^n).

8. Non viene specificato niente nel testo dell'esercizio, per cui dobbiamo considerare M come applicazione lineare da $\mathbb{C}^3$ in $\mathbb{C}^3$,

$$M : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3, \qquad M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax \\ bx + y + z \\ y + z \end{pmatrix}.$$

[9] Il motivo per cui l'uguaglianza $A = PDP^{-1}$ deve sussistere è che essa è equivalente all'uguaglianza $AP = PD$ (ottenuta moltiplicando a destra entrambi i membri per P); d'altra parte, quest'ultima uguaglianza vale sicuramente. Infatti, usando la notazione $B^{(j)}$ per denotare la j-esima colonna di una matrice B, si ha

$$\begin{aligned} (AP)^{(1)} &= A \cdot P^{(1)} = 2P^{(1)} \quad \text{(perché } P^{(1)} \text{ è autovettore di } A \text{ corrispondente a 2)} \\ &= d_{11}P^{(1)} = P \cdot D^{(1)} = (PD)^{(1)}, \end{aligned}$$

e analogamente si ha $(AP)^{(2)} = (PD)^{(2)}$ e $(AP)^{(3)} = (PD)^{(3)}$. Quindi $AP = PD$.

Per il criterio di diagonalizzabilità, M è diagonalizzabile (su $\mathbb{C}$) se e solo se ogni autovalore di M ha molteplicità algebrica uguale a quella geometrica. Nel seguito, se λ è un autovalore di M, indichiamo con $m_A(\lambda)$ e $m_G(\lambda)$ rispettivamente la molteplicità algebrica e geometrica di λ. Il polinomio caratteristico di M è

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} a-\lambda & 0 & 0 \\ b & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)\lambda(\lambda-2)$$

e gli autovalori di M sono $0, 2, a$.

- Se $a \neq 0, 2$, allora M è diagonalizzabile perché ha tre autovalori distinti (ciascuno dei quali ha quindi molteplicità geometrica uguale a 1 come la molteplicità algebrica).
- Se $a = 0$, allora $m_A(0) = 2$, $m_A(2) = 1$ e sicuramente $m_G(2) = 1$, per cui M è diagonalizzabile se e solo se $m_G(0) = 2$ cioè se e solo se l'autospazio V_0 relativo a 0 ha dimensione 2. Si ha

$$\begin{aligned} V_0 &= \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 : M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \} = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 : \begin{pmatrix} 0x \\ bx+y+z \\ y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \} \\ &= \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 : z = -y,\, bx = 0 \} = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ -y \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 : bx = 0 \}; \end{aligned}$$

  se $b = 0$, allora non ci sono condizioni sulla variabile x, $V_0 = \mathrm{span}\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \}$ e $\dim V_0 = 2$; se invece $b \neq 0$, allora deve essere $x = 0$, $V_0 = \mathrm{span}\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \}$ e $\dim V_0 = 1$. Quindi, nel caso $a = 0$,

$$M \text{ è diagonalizzabile } \Leftrightarrow \dim V_0 = 2 \Leftrightarrow b = 0.$$

- Se $a = 2$, allora $m_A(0) = 1$, $m_A(2) = 2$ e sicuramente $m_G(0) = 1$, per cui M è diagonalizzabile se e solo se $m_G(2) = 2$ cioè se e solo se l'autospazio V_2 relativo a 2 ha dimensione 2. Si ha

$$\begin{aligned} V_2 &= \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 : M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \} = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 : \begin{pmatrix} 2x \\ bx+y+z \\ y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \} \\ &= \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 : bx - y + z = 0,\ y - z = 0 \} = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 : z = y,\ bx = 0 \} \\ &= \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 : bx = 0 \}, \end{aligned}$$

  per cui la situazione è analoga al caso precedente: se $b = 0$, allora non ci sono condizioni sulla variabile x, $V_2 = \mathrm{span}\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \}$ e $\dim V_2 = 2$; se invece $b \neq 0$, allora deve essere $x = 0$,

$V_2 = \text{span}\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ e $\dim V_2 = 1$. Quindi, nel caso $a = 2$,

$$M \text{ è diagonalizzabile } \Leftrightarrow \dim V_2 = 2 \Leftrightarrow b = 0.$$

In conclusione, M è diagonalizzabile nei seguenti casi:

(i) $a \neq 0, 2$;

(ii) $a = 0$ e $b = 0$;

(iii) $a = 2$ e $b = 0$.

9. Sono dati $h \in \mathbb{R}$ e l'applicazione lineare

$$\phi : \mathbb{R}_2[t] \to \mathbb{R}_2[t], \qquad \phi(p(t)) = p(ht+1) \quad \forall p(t) \in \mathbb{R}_2[t].$$

Dobbiamo dire per quali $h \in \mathbb{R}$ la ϕ è diagonalizzabile.

Quando si deve risolvere un problema per un'applicazione lineare 'astratta' (come ϕ) definita su uno spazio vettoriale 'astratto' (come $\mathbb{R}_2[t]$), c'è un modo standard per ricondursi a risolvere lo stesso problema per un'applicazione lineare 'concreta' (una matrice) definita su uno spazio vettoriale 'concreto' (che non nostro caso sarà $\mathbb{R}^3$, dove $3 = \dim \mathbb{R}_2[t]$ e $\mathbb{R}$ è il corpo su cui è definito lo spazio vettoriale 'astratto' $\mathbb{R}_2[t]$). Vediamo come si procede.

Innanzitutto, si sceglie una base in $\mathbb{R}_2[t]$: per semplicità, scegliamo la base canonica $\{1, t, t^2\}$, ma qualunque altra base andrebbe bene lo stesso.

Dopodiché, si costruisce la matrice Φ associata a ϕ rispetto alla base $\{1, t, t^2\}$. Si ha

$$\begin{aligned} \phi(1) &= 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot t + 0 \cdot t^2 \\ \phi(t) &= ht + 1 = 1 \cdot 1 + h \cdot t + 0 \cdot t^2 \\ \phi(t^2) &= (ht+1)^2 = 1 \cdot 1 + 2h \cdot t + h^2 \cdot t^2 \end{aligned}$$

e quindi $\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & h & 2h \\ 0 & 0 & h^2 \end{pmatrix}$. Ricordiamo che la proprietà fondamentale di Φ è la seguente:

$$\Phi \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \phi(a_0 + a_1 t + a_2 t^2) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2.$$

In altri termini, per ogni fissato polinomio $a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathbb{R}_2[t]$, Φ associa al v.d.c. [10] di $a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ rispetto a $\{1, t, t^2\}$ il v.d.c. di $\phi(a_0 + a_1 t + a_2 t^2)$ rispetto a $\{1, t, t^2\}$.

A titolo di esempio: siccome

$$\Phi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2h \\ -h^2 \end{pmatrix}, \quad \Phi \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5h \\ 3h^2 \end{pmatrix},$$

questo significa che $\phi(1 - t^2) = -2ht - h^2 t^2$, $\phi(2 - t + 3t^2) = 4 + 5ht + 3h^2 t^2$ (come si può verificare direttamente calcolando $\phi(1 - t^2)$ e $\phi(2 - t + 3t^2)$).

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{R}_2[t] \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, phantom, "|||"] & \mathbb{R}_2[t] \arrow[d, phantom, "|||"] \\
\mathbb{R}^3 \arrow[r, "\Phi"] & \mathbb{R}^3
\end{tikzcd}
$$

Figura 3: illustrazione del fatto che $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è una 'fotocopia' di $\phi : \mathbb{R}_2[t] \to \mathbb{R}_2[t]$. Il simbolo ||| significa che $\mathbb{R}_2[t]$ è identificato con $\mathbb{R}^3$ mediante l'identificazione $a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \equiv {}^t(a_0, a_1, a_2)$. Osserviamo che in questo caso si deve considerare la matrice Φ come applicazione da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ (e non da $\mathbb{C}^3$ in $\mathbb{C}^3$), perché i v.d.c. dei polinomi di $\mathbb{R}_2[t]$ rispetto a $\{1, t, t^2\}$ sono vettori di $\mathbb{R}^3$, non di $\mathbb{C}^3$.

Quindi Φ è una 'fotocopia' di ϕ e ha il vantaggio di lavorare sullo spazio concreto $\mathbb{R}^3$ anziché sullo spazio astratto $\mathbb{R}_2[t]$ (Figura 3).

Si consiglia di dimostrare per esercizio questi risultati.

(i) I seguenti fatti sono equivalenti:

- λ è un autovalore di $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ con corrispondente autovettore $\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$;
- λ è un autovalore di $\phi : \mathbb{R}_2[t] \to \mathbb{R}_2[t]$ con corrispondente autovettore $a_0 + a_1 t + a_2 t^2$.

In particolare, Φ e ϕ hanno gli stessi autovalori e ϕ è diagonalizzabile se e solo se lo è Φ.

(ii) I seguenti fatti sono equivalenti:

- $\begin{pmatrix} k_0 \\ k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} \in \ker(\Phi)$;
- $k_0 + k_1 t + k_2 t^2 \in \ker(\phi)$.

Quindi $\ker(\phi) = \{k_0 + k_1 t + k_2 t^2 : \begin{pmatrix} k_0 \\ k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} \in \ker(\Phi)\}$.

(iii) I seguenti fatti sono equivalenti

- $\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}(\Phi)$;
- $y_0 + y_1 t + y_2 t^2 \in \mathrm{Im}(\phi)$.

Quindi $\mathrm{Im}(\phi) = \{y_0 + y_1 t + y_2 t^2 : \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}(\Phi)\}$.

Risolviamo adesso il nostro esercizio. Per (i), ϕ è diagonalizzabile se e solo se lo è Φ, per cui i valori di h per cui ϕ è diagonalizzabile sono esattamente i valori di h per cui Φ è diagonalizzabile: abbiamo ricondotto il problema astratto iniziale a un problema concreto.

[10] v.d.c.= vettore delle coordinate.

Per il criterio di diagonalizzabilità, l'applicazione $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è diagonalizzabile (cioè Φ è **diagonalizzabile su** $\mathbb{R}$) se e solo se gli autovalori della matrice Φ (cioè le radici del polinomio caratteristico di Φ) sono **tutti reali** e ogni autovalore ha molteplicità algebrica uguale a quella geometrica.

Gli autovalori di Φ sono $1, h, h^2$ e sono tutti reali. Pertanto si ha quanto segue.

- Se $h \neq 0, 1, -1$, allora Φ è diagonalizzabile perché ha tre autovalori distinti (ciascuno dei quali ha quindi molteplicità geometrica 1 come quella algebrica).
- Se $h = 0$ allora Φ ha due autovalori $0, 1$ con $m_A(0) = 2,\ m_A(1) = 1$. Quindi Φ è diagonalizzabile se e solo se $m_G(0) = 2$. L'autospazio V_0 relativo a 0 è

$$\begin{aligned} V_0 &= \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \Phi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\} = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x+y+z \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\} \\ &= \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : z = -x-y\} = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ -x-y \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R}\} = \operatorname{span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\} \end{aligned}$$

  per cui $m_G(0) = \dim V_0 = 2 = m_A(0)$ e dunque Φ è diagonalizzabile.
- Se $h = 1$, allora Φ ha solo l'autovalore 1 con $m_A(1) = 3$. Quindi Φ è diagonalizzabile se e solo se $m_G(1) = 3$ cioè se e solo se l'autospazio V_1 relativo a 1 coincide con tutto $\mathbb{R}^3$. Si ha

$$\begin{aligned} V_1 &= \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \Phi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\} = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x+y+z \\ y+2z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\} \\ &= \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : y+z = 0,\ 2z = 0\} = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : z = 0,\ y = 0\} \neq \mathbb{R}^3, \end{aligned}$$

  per cui Φ non è diagonalizzabile.
- Se $h = -1$, allora Φ ha due autovalori $1, -1$ con $m_A(1) = 2$ e $m_A(-1) = 1$. Quindi Φ è diagonalizzabile se e solo se $m_G(1) = 2$. Si ha

$$\begin{aligned} V_1 &= \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \Phi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\} = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x+y+z \\ -y-2z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\} \\ &= \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : y+z = 0,\ -2y-2z = 0\} = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : y+z = 0\} \\ &= \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ -y \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R}\} = \operatorname{span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\}, \end{aligned}$$

  per cui $m_G(1) = \dim V_1 = 2 = m_A(1)$ e dunque Φ è diagonalizzabile.

In conclusione, Φ è diagonalizzabile per tutti gli $h \in \mathbb{R}$ tranne che per $h = 1$. Dunque ϕ è diagonalizzabile per tutti gli $h \in \mathbb{R}$ tranne che per $h = 1$. Volendo, con tutte le informazioni su Φ che abbiamo raccolto, potremmo fornire analoghe informazioni su ϕ. Ad esempio: abbiamo visto che gli autovalori di Φ sono $1, h, h^2$, per cui gli autovalori di ϕ sono $1, h, h^2$; abbiamo visto che, se $h = 0$, l'autospazio di Φ relativo a 0 è $V_0 = \text{span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\}$, ragione per cui, se $h = 0$, l'autospazio di ϕ relativo a 0 è $\widetilde{V_0} = \text{span}\{1 - t^2, t - t^2\}$; abbiamo visto che, se $h = -1$, l'autospazio di Φ relativo a 1 è $V_1 = \text{span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\}$, ragione per cui, se $h = -1$, l'autospazio di ϕ relativo a 1 è $\widetilde{V_1} = \text{span}\{1, t - t^2\}$. Ecc...

Si consiglia di provare i seguenti esercizi.

Esercizio 1. Rifare l'esercizio 9 con lo stesso metodo, scegliendo però la base $\{1, 1-t, 1+t^2\}$ invece della base canonica.

Esercizio 2. Si consideri l'applicazione

$$\phi : \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{C}), \qquad \phi(A) = \frac{A + {}^tA}{2}.$$

Dopo aver dimostrato che ϕ è lineare, risolvere i seguenti punti con la stessa tecnica vista per la soluzione dell'esercizio 9.

(a) Determinare il nucleo e l'immagine di ϕ.

(b) Determinare gli autovalori e gli autospazi di ϕ.

(c) Dire se ϕ è diagonalizzabile.