1. (1) Dobbiamo stabilire se S è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$. Verifichiamo se sono soddisfatte le due proprietà di sottospazio vettoriale, ossia

   (a) $\forall (x,y,z),\ (x',y',z') \in S$ vale che $(x,y,z)+(x',y',z') \stackrel{\text{def}}{=} (x+x', y+y', z+z') \in S$.

   (b) $\forall (x,y,z) \in S$ e $\forall c \in \mathbb{R}$ vale che $c(x,y,z) \stackrel{\text{def}}{=} (cx, cy, cz) \in S$.

   La (a) vale. Infatti, $\forall (x,y,z),\ (x',y',z') \in S$ vale che $2(x+x')+3(y+y')+(z+z') = (2x+3y+z)+(2x'+3y'+z') = 0+0 = 0$, per cui $(x,y,z)+(x',y',z') \in S$ per definizione di S.

   Anche la (b) vale. Infatti, $\forall (x,y,z) \in S$ e $\forall c \in \mathbb{R}$ vale che $2(cx)+3(cy)+(cz) = c(2x+3y+z) = c0 = 0$, per cui $c(x,y,z) \in S$ per definizione di S.

   Dunque S è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

   Per trovare la dimensione e una base di S, procediamo così:

$$
\begin{aligned}
S &\stackrel{\text{def}}{=} \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | 2x+3y+z=0\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | z = -2x-3y\} = \{(x,y,-2x-3y) | x,y \in \mathbb{R}\} \\
&= \{x(1,0,-2)+y(0,1,-3) | x,y \in \mathbb{R}\} \\
&\stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{span}\{(1,0,-2),(0,1,-3)\}. \qquad (1)
\end{aligned}
$$

   Dall'espressione (1) di S si vede che S è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ e precisamente è il sottospazio generato da $(1,0,-2)$ e $(0,1,-3)$ (quindi la (1) fornisce un'altra dimostrazione del fatto che S è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$). Inoltre, siccome i vettori $(1,0,-2)$ e $(0,1,-3)$ sono linearmente indipendenti (perché non ce n'è uno multiplo dell'altro), [1] dalla (1) si deduce che $\dim S = 2$ e una base di S è $\{(1,0,-2),(0,1,-3)\}$.

   (2) Dobbiamo stabilire se P è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}_3[t]$. P non è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}_3[t]$ perché non contiene il polinomio nullo $O = 0 \cdot 1 + 0 \cdot t + 0 \cdot t^2 + 0 \cdot t^3$, in quanto tutti i polinomi di P hanno il coefficiente a_1 di t diverso da 0.

2. Precisazione: riguardiamo U, W como sottospazi di $\mathbb{R}^4$ (e non di $\mathbb{C}^4$), per cui

$$U = \operatorname{span}\{u_1 = (-1,0,3,2), u_2 = (0,-1,1,3)\} \stackrel{\text{def}}{=} \{au_1 + bu_2 :\ a,b \in \mathbb{R}\},$$

$$W = \operatorname{span}\{w_1 = (2,1,1,-2), w_2 = (1,0,5,3)\} \stackrel{\text{def}}{=} \{cw_1 + dw_2 :\ c,d \in \mathbb{R}\}.$$

   Per definizione,

$$U+W = \{u+w | u \in U,\ w \in W\} = \{au_1+bu_2+cw_1+dw_2 | a,b,c,d \in \mathbb{R}\} \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{span}\{u_1,u_2,w_1,w_2\}. \quad (2)$$

   Per trovare la dimensione e una base di $\operatorname{span}\{u_1,u_2,w_1,w_2\}$ utilizziamo l'algoritmo 'casting out' (p. 138 del libro di Seymour Lipschutz e Marc Lipson, 'Algebra lineare', McGraw-Hill, terza edizione), il quale fa la cosa seguente:

   dati alcuni vettori $\{v_1,...,v_r\}$ *in* $\mathbb{R}^n$ *(o in* $\mathbb{C}^n$*), l'algoritmo 'casting out' determina la dimensione e una base di* $\operatorname{span}\{v_1,...,v_r\}$ *e la base che viene determinata è un sottoinsieme di* $\{v_1,...,v_r\}$.

[1] Due vettori v_1, v_2 sono linearmente *dipendenti* se e solo se ce n'è uno multiplo dell'altro.

Infatti, se v_1, v_2 sono linearmente dipendenti, allora esistono scalari a, b non entrambi nulli tali che $av_1 + bv_2 = O$. Quindi, se è $a \neq 0$, allora $v_1 = -\frac{b}{a}v_2$ è multiplo di v_2, mentre se è $b \neq 0$, allora $v_2 = -\frac{a}{b}v_1$ è multiplo di v_1, e in ogni caso ce n'è uno multiplo dell'altro.

Viceversa, se tra v_1, v_2 ce n'è uno multiplo dell'altro, per fissare le idee supponiamo che sia $v_1 = cv_2$ multiplo di v_2, allora $v_1 - cv_2 = O$ e quindi v_1, v_2 sono linearmente dipendenti (la combinazione lineare precedente è uguale a O e non ha entrambi i coefficienti nulli essendo il primo uguale a 1).

Prima di applicare l'algoritmo per trovare dimensione e base di $\text{span}\{u_1, u_2, w_1, w_2\}$, ricordiamo che una matrice si dice in forma a scala (per righe) se

(i) le righe nulle (se ce ne sono) sono in fondo alla matrice;

(ii) per ogni riga non nulla, il primo elemento non nullo si trova a *destra* del primo elemento non nullo della riga precedente.

Ad esempio, le seguenti matrici sono in forma a scala:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & -7 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

mentre la seguente non lo è (a causa della riga 3, il cui primo elemento non nullo è -4 e non si trova a destra del primo elemento non nullo della riga precedente, che è 2):

$$\begin{bmatrix} -1 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Quando una matrice è in forma a scala, i primi elementi non nulli di ogni riga non nulla si chiamano pivot (e sono tanti quanti le righe non nulle della matrice). Ad esempio, gli elementi pivot delle matrici a scala A e B sono quelli cerchiati.

Applichiamo adesso l'algoritmo 'casting out' per trovare dimensione e base di $\text{span}\{u_1, u_2, w_1, w_2\}$.

- Si forma la matrice M le cui colonne sono u_1, u_2, w_1, w_2:

$$M = \left[\ u_1 \mid u_2 \mid w_1 \mid w_2\ \right] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

- Si riduce M in forma a scala usando il metodo di Gauss ed eventuali scambi di righe: [2]

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -2 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 8 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =: N$$

(al primo passo ho creato degli zeri nella prima colonna con le seguenti operazioni elementari di Gauss: sostituzione della (riga 3) con (riga 3)$+3\cdot$(riga 1); sostituzione della (riga 4) con (riga 4)$+2\cdot$(riga 1); al secondo passo ho creato degli zeri nella seconda colonna con le seguenti operazioni elementari di Gauss: sostituzione della (riga 3) con (riga 3)$+$(riga 2); sostituzione della (riga 4) con (riga 4)$+3\cdot$(riga 2); all'ultimo passo ho creato zero nella terza colonna con la seguente operazione elementare di Gauss: sostituzione della (riga 4) con (riga 4)$-\frac{5}{8}\cdot$(riga 3))

[2] Gli scambi di righe si usano quando il metodo di Gauss da solo non riesce a ridurre M in forma a scala.

- Una volta ottenuta la matrice N in forma a scala, le conclusioni sono molteplici:
  (a) $\dim[\operatorname{span}\{u_1,u_2,w_1,w_2\}] \overset{\text{def}}{=} \operatorname{rango}(M) =$ numero di elementi pivot di $N = 3$;
  (b) una base di $\operatorname{span}\{u_1,u_2,w_1,w_2\}$ è $\{u_1,u_2,w_1\}$ per il motivo seguente: u_1,u_2,w_1 sono le colonne di M che corrispondono agli elementi pivot di N.

In definitiva, ricordando la (2),

$$\dim(U+W) = \dim[\operatorname{span}\{u_1,u_2,w_1,w_2\}] = 3$$

e una base per $U+W$ è $\{u_1,u_2,w_1\}$.

Siccome u_1,u_2 sono linearmente indipendenti (perché non ce n'è uno multiplo dell'altro) e w_1,w_2 sono linearmente indipendenti (per lo stesso motivo), si ha $\dim U = 2 = \dim W$ e quindi

$$\dim(U\cap W) = \dim U + \dim W - \dim(U+W) = 2+2-3 = 1.$$

Per trovare una base di $U\cap W$ procediamo come segue:

$$\begin{aligned}
U\cap W &= \{u\in U | u\in W\} = \{u\in U|\exists\, x,y\in\mathbb{R} \text{ tali che } xw_1+yw_2=u\}\\
&= \{au_1+bu_2|a,b\in\mathbb{R} \text{ ed } \exists\, x,y\in\mathbb{R} \text{ tali che } xw_1+yw_2 = au_1+bu_2\}\\
&= \left\{au_1+bu_2|a,b\in\mathbb{R} \text{ ed } \exists\, x,y\in\mathbb{R} \text{ tali che } \begin{pmatrix} 2x+y\\ x\\ x+5y\\ -2x+3y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a\\ -b\\ 3a+b\\ 2a+3b\end{pmatrix}\right\}\\
&= \left\{au_1+bu_2|a,b\in\mathbb{R} \text{ e il sistema } \begin{cases} 2x+y=-a\\ x=-b\\ x+5y=3a+b\\ -2x+3y=2a+3b\end{cases} \text{è risolubile (cioè ammette una soluzione } (x,y)\in\mathbb{R}^2)\right\}\\
&= \left\{au_1+bu_2|a,b\in\mathbb{R} \text{ e rango} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -a\\ 1 & 0 & -b\\ 1 & 5 & 3a+b\\ -2 & 3 & 2a+3b\end{bmatrix} = \text{rango} \begin{bmatrix} 2 & 1\\ 1 & 0\\ 1 & 5\\ -2 & 3\end{bmatrix}\right\} \quad \text{(per Rouché-Capelli)}\\
&= \left\{au_1+bu_2|a,b\in\mathbb{R} \text{ e rango} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -a\\ 1 & 0 & -b\\ 1 & 5 & 3a+b\\ -2 & 3 & 2a+3b\end{bmatrix} = 2\right\} \quad \text{(perché i vettori } \begin{bmatrix} 2\\ 1\\ 1\\ -2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1\\ 0\\ 5\\ 3\end{bmatrix} \text{ sono lin. indip.)} \qquad (3)
\end{aligned}$$

Si tratta ora di calcolare rango $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -a\\ 1 & 0 & -b\\ 1 & 5 & 3a+b\\ -2 & 3 & 2a+3b\end{bmatrix}$ e stabilire per quali $a,b\in\mathbb{R}$ esso è uguale a 2.

Per calcolare rango $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -a\\ 1 & 0 & -b\\ 1 & 5 & 3a+b\\ -2 & 3 & 2a+3b\end{bmatrix}$, riduciamo la matrice $M' := \begin{bmatrix} 2 & 1 & -a\\ 1 & 0 & -b\\ 1 & 5 & 3a+b\\ -2 & 3 & 2a+3b\end{bmatrix}$ in forma a scala, come abbiamo fatto per la matrice M sopra, usando Gauss ed eventuali scambi di righe. Quando avremo ottenuto una matrice a scala N', il numero di elementi pivot di N' è il rango di M.[3]

[3] Questo è un risultato che si potrebbe dimostrare: data una matrice A, se si riduce A in forma a scala ottenendo una matrice B, il numero di pivot di B è il rango di A.

Si ha

$$M' = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -a \\ 1 & 0 & -b \\ 1 & 5 & 3a+b \\ -2 & 3 & 2a+3b \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -b \\ 2 & 1 & -a \\ 1 & 5 & 3a+b \\ -2 & 3 & 2a+3b \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -b \\ 0 & 1 & 2b-a \\ 0 & 5 & 3a+2b \\ 0 & 3 & 2a+b \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -b \\ 0 & 1 & 2b-a \\ 0 & 0 & 8a-8b \\ 0 & 0 & 5a-5b \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -b \\ 0 & 1 & 2b-a \\ 0 & 0 & 8a-8b \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =: N'.$$

Quindi

$$\text{rango}(M') = 2 \Leftrightarrow \text{il numero di pivot di } N' \text{ è } 2 \Leftrightarrow 8a-8b=0 \Leftrightarrow a=b$$

e dunque, ricordando la (3), si ha

$$U \cap W = \{au_1 + bu_2 | a, b \in \mathbb{R} \text{ e } a = b\} = \{au_1 + au_2 | a \in \mathbb{R}\} = \{a(-1,-1,4,5) | a \in \mathbb{R}\}.$$

Da qui vediamo direttamente che $\dim(U \cap W) = 1$ (per cui questa è un'altra dimostrazione del fatto che $\dim(U \cap W) = 1$) e inoltre una base per $U \cap W$ è $\{(-1,-1,4,5)\}$.

3. Lo spazio vettoriale $\mathbb{R}_2[t]$ dei polinomi di grado minore o uguale a 2 ha dimensione 3 (infatti una base è quella canonica $\{1, t, t^2\}$ che ha 3 elementi). Pertanto, non possono esistere in $\mathbb{R}_2[t]$ più di 3 vettori linearmente indipendenti. Di conseguenza, i polinomi $p_1(t), p_2(t), p_3(t), p_4(t)$ non possono essere linearmente indipendenti (sono troppi).

   Sempre per il fatto che $\dim \mathbb{R}_2[t] = 3$, se troviamo 3 polinomi tra $p_1(t), p_2(t), p_3(t), p_4(t)$ che sono linearmente indipendenti, allora questi tre sono automaticamente una base di $\mathbb{R}_2[t]$, per cui essi generano $\mathbb{R}_2[t]$ e quindi concludiamo che anche $p_1(t), p_2(t), p_3(t), p_4(t)$ generano $\mathbb{R}_2[t]$. Noi ora mostriamo che $p_1(t), p_2(t), p_3(t)$ sono linearmente indipendenti e così concludiamo da una parte che $p_1(t), p_2(t), p_3(t)$ sono una base di $\mathbb{R}_3[t]$ e dall'altra che $p_1(t), p_2(t), p_3(t), p_4(t)$ generano $\mathbb{R}_3[t]$.

   Dimostrazione che $p_1(t), p_2(t), p_3(t)$ sono linearmente indipendenti. Supponiamo che $a, b, c \in \mathbb{R}$ sono tali che $ap_1(t) + bp_2(t) + cp_3(t) = O$ (O è il polinomio identicamente nullo, che è lo zero dello spazio vettoriale $\mathbb{R}_2[t]$). Allora $(a+c) + (a+b+c)t + (b+c)t^2 = O$ e quindi

$$\begin{cases} a+c=0 \\ a+b+c=0 \\ b+c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+c=0 \\ b=0 \\ b+c=0 \end{cases} \Rightarrow a=b=c=0.$$

   Dunque $p_1(t), p_2(t), p_3(t)$ sono lin. indip. per definizione.

4. In questo esercizio si sta implicitamente considerando la traccia come un'applicazione

$$\text{tr} : \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \qquad \text{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

   Per dimostrare che tr è un'applicazione lineare, mostriamo che sono soddisfatte le due proprietà

   (a) $\forall A, B \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$, $\text{tr}(A+B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$;

   (b) $\forall A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ e $\forall c \in \mathbb{R}$, $\text{tr}(cA) = c \cdot \text{tr}(A)$.

La (a) è soddisfatta. Infatti, $\forall A, B \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$,

$$\operatorname{tr}(A+B) = \sum_{i=1}^{n}(a_{ii}+b_{ii}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = \operatorname{tr}(A)+\operatorname{tr}(B).$$

Anche la (b) è soddisfatta. Infatti, $\forall A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ e $\forall c \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{tr}(cA) = \sum_{i=1}^{n} c a_{ii} = c\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = c \cdot \operatorname{tr}(A).$$

Dunque tr è lineare.

Determiniamo la dimensione del nucleo di tr, ker(tr). Ricordando che l'immagine di un'applicazione lineare è un sottospazio vettoriale dello spazio di arrivo, l'immagine di tr è un sottospazio di $\mathbb{R}$, il quale ha come suoi sottospazi solo $\{0\}$ e $\mathbb{R}$. Quindi, siccome Im(tr)$\neq \{0\}$, Im(tr)$= \mathbb{R}$ ha dimensione 1 e pertanto

$$\dim(\ker(\operatorname{tr})) = \dim(\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})) - \dim(\operatorname{Im}(\operatorname{tr})) = n^2-1.$$

Determiniamo adesso una base di ker(tr). A tal fine osserviamo che

$$\begin{aligned}
\ker(\operatorname{tr}) &= \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}) : a_{11}+...+a_{nn}=0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}) : a_{11} = -a_{22}-...-a_{nn} \right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} -a_{22}-...-a_{nn} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} : a_{ij} \in \mathbb{R} \ \ \forall (i,j) \neq (1,1) \right\} \\
&= \left\{ a_{22} \begin{bmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} + ... + a_{nn} \begin{bmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} + \sum_{\substack{r,s=1 \\ r\neq s}}^{n} a_{rs}E_{rs} : a_{ij} \in \mathbb{R} \ \ \forall (i,j) \neq (1,1) \right\}
\end{aligned}$$

(nell'uguaglianza precedente, E_{rs} è la matrice che ha 1 in posizione (r,s) e 0 altrove)

$$\stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{span} \left\{ \begin{bmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, ..., \begin{bmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}, E_{rs} : r,s=1,...,n, \ r\neq s \right\}.$$

Dalla precedente vediamo che ker(tr) è generato dagli n^2-1 elementi

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, ..., \begin{bmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}, E_{rs} : r,s=1,...,n, \ r\neq s, \tag{4}$$

per cui, siccome sappiamo già che $\dim(\ker(\operatorname{tr})) = n^2-1$, gli n^2-1 elementi (4) devono per forza essere linearmente indipendenti (altrimenti ker(tr) avrebbe dimensione minore di n^2-1) e dunque sono una base di ker(tr).

5. La matrice del cambio di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ è quell'unica matrice M che, per ogni polinomio $p(t)$, trasforma il vettore delle coordinate (v.d.c.) di $p(t)$ rispetto a $\mathcal{B}$ nel v.d.c. di $p(t)$ rispetto a $\mathcal{B}'$.

   Per trovare M, bisogna scrivere i polinomi in $\mathcal{B}$ come combinazione lineare dei polinomi in $\mathcal{B}'$:

$$\begin{aligned}1 &= 1\cdot 1 + 0\cdot (t-1) + 0\cdot (2t^2-4t-6)\\ t &= 1+(t-1) = 1\cdot 1 + 1\cdot (t-1) + 0\cdot (2t^2-4t-6)\\ t^2 &= \frac{1}{2}(2t^2-4t-6)+2t+3 = \frac{1}{2}(2t^2-4t-6)+2(t-1)+2+3 = 5\cdot 1 + 2\cdot (t-1) + \frac{1}{2}\cdot (2t^2-4t-6).\end{aligned}$$

   La matrice M è ottenuta mettendo in colonna i coefficienti:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

   Notiamo che $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ è il v.d.c. di 1 rispetto a $\mathcal{B}$ e $Me_1 =$ prima colonna di $M = e_1$ è il v.d.c. di 1 rispetto a $\mathcal{B}'$. Analogamente, $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ è il v.d.c. di t rispetto a $\mathcal{B}$ e $Me_2 =$ seconda colonna di $M = [1,1,0]^T$ è il v.d.c. di t rispetto a $\mathcal{B}'$. Infine, $e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ è il v.d.c. di t^2 rispetto a $\mathcal{B}$ e $Me_3 =$ terza colonna di $M = [5,2,\frac{1}{2}]^T$ è il v.d.c. di t^2 rispetto a $\mathcal{B}'$.

   La matrice del cambio di base da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$ è quell'unica matrice N che, per ogni polinomio $p(t)$, trasforma il v.d.c. di $p(t)$ rispetto a $\mathcal{B}'$ nel v.d.c. di $p(t)$ rispetto a $\mathcal{B}$.

   Per trovare N, bisogna scrivere i polinomi in $\mathcal{B}'$ come combinazione lineare dei polinomi in $\mathcal{B}$:

$$\begin{aligned}1 &= 1\cdot 1 + 0\cdot t + 0\cdot t^2\\ t-1 &= -1\cdot 1 + 1\cdot t + 0\cdot t^2\\ 2t^2-4t-6 &= -6\cdot 1 - 4\cdot t + 2\cdot t^2\end{aligned}$$

   da cui

$$N = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

   Osserviamo che $N = M^{-1}$ e non è un caso, infatti è sempre così: la matrice del cambio di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ è l'inversa della matrice del cambio di base da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$.

6. Applicando Gauss (con un preliminare scambio di righe che è utile per non dover trattare separatamente il caso $\lambda = 5$), si ha

$$\begin{cases} (5-\lambda)x-2y-z=1 \\ -2x+(2-\lambda)y-2z=2 \\ -x-2y+(5-\lambda)z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x-2y+(5-\lambda)z=1 \\ -2x+(2-\lambda)y-2z=2 \\ (5-\lambda)x-2y-z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x-2y+(5-\lambda)z=1 \\ (6-\lambda)y+(2\lambda-12)z=0 \\ (2\lambda-12)y+(24-10\lambda+\lambda^2)z=6-\lambda \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x-2y+(5-\lambda)z=1 \\ (6-\lambda)y+(2\lambda-12)z=0 \\ \lambda(\lambda-6)z=6-\lambda \end{cases} \tag{5}$$

- Se $\lambda = 6$, allora il sistema (5) diventa

$$\begin{cases} -x - 2y - z = 1 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

per cui l'insieme delle soluzioni è

$$\begin{aligned} S &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | -x - 2y - z = 1\} = \{(x, y, -x - 2y - 1) | x, y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1, 0, -1) + y(0, 1, -2) + (0, 0, -1) | x, y \in \mathbb{R}\} = (0, 0, -1) + \text{span}\{(1, 0, -1), (0, 1, -2)\} \end{aligned}$$

e quindi, siccome $(1, 0, -1), (0, 1, -2)$ sono lin. indip. (non ce n'è uno multiplo dell'altro), $\text{span}\{(1, 0, -1), (0, 1, -2)\}$ ha dimensione 2 e si dice che anche S ha dimensione 2 (anche se S non è uno spazio vettoriale).

- se $\lambda = 0$ allora il sistema non ha soluzioni (l'ultima equazione è $0 = 6$ e non è mai verificata);
- se $\lambda \neq 0, 6$ allora il sistema ha un'unica soluzione che si ricava da (5) per sostituzione all'indietro e che è

$$z = -\frac{1}{\lambda}, \quad y = -\frac{2}{\lambda}, \quad x = -\frac{1}{\lambda}$$

ovvero $(x, y, z) = \left(-\frac{1}{\lambda}, -\frac{2}{\lambda}, -\frac{1}{\lambda}\right)$.

7. Per dimostrare che g è un prodotto scalare, dobbiamo dimostrare che valgono le tre proprietà seguenti:

(a) $\forall A, B \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$, $g(A, B) = g(B, A)$.

(b) $\forall A, B, C \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$, $g(A, B + C) = g(A, B) + g(A, C)$.

(c) $\forall A, B \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ e $\forall c \in \mathbb{R}$, $g(cA, B) = c \cdot g(A, B) = g(A, cB)$.

La (a) vale. Infatti, $\forall A, B \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$, ricordando che la traccia di una matrice e della sua trasposta sono uguali, si ha

$$g(A, B) = \text{tr}({}^tBPA) = \text{tr}\left({}^t({}^tBPA)\right) = \text{tr}\left({}^tA\, {}^tP\, {}^t({}^tB)\right) = \text{tr}\left({}^tAPB\right) = g(B, A).$$

La (b) vale. Infatti, $\forall A, B, C \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} g(A, B + C) &= \text{tr}({}^t(B + C)PA) = \text{tr}(({}^tB + {}^tC)PA) = \text{tr}({}^tBPA + {}^tCPA) \\ &= \text{tr}({}^tBPA) + \text{tr}({}^tCPA) = g(A, B) + g(A, C). \end{aligned}$$

La (c) vale. Infatti, $\forall A, B \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ e $\forall c \in \mathbb{R}$,

$$g(cA, B) = \text{tr}({}^tBP(cA)) = \text{tr}(c({}^tBPA)) = c \cdot \text{tr}({}^tBPA) = c \cdot g(A, B),$$

$$g(A, cB) = \text{tr}({}^t(cB)PA) = \text{tr}((c\, {}^tB)PA) = \text{tr}(c({}^tBPA)) = c \cdot \text{tr}({}^tBPA) = c \cdot g(A, B).$$

Il prodotto scalare g è degenere (e quindi, in particolare, non è definito positivo). Infatti, la matrice $K = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ non è la matrice nulla, ma si ha $PK = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O$ (O denota la matrice nulla) e quindi, per ogni $X \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$, risulta $g(K, X) = \text{tr}({}^tXPK) = \text{tr}({}^tXO) = \text{tr}(O) = 0$.

8. Dobbiamo dimostrare che

$$g : \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \qquad g(A,B) = \operatorname{tr}(AB)$$

è un prodotto scalare. Per fare questo, dobbiamo dimostrare che valgono le tre proprietà seguenti:

(a) $\forall A, B \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$, $g(A,B) = g(B,A)$.

(b) $\forall A, B, C \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$, $g(A, B+C) = g(A,B) + g(A,C)$.

(c) $\forall A, B \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ e $\forall c \in \mathbb{R}$, $g(cA, B) = c \cdot g(A,B) = g(A, cB)$.

Osserviamo preliminarmente che, $\forall A, B \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$,

$$g(A,B) = \operatorname{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} (AB)_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki}. \tag{6}$$

La (a) vale. Infatti, per la (6), $\forall A, B \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$,

$$g(A,B) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} b_{ki} a_{ik} = g(B,A).$$

La (b) vale. Infatti, $\forall A, B, C \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$,

$$g(A, B+C) = \operatorname{tr}(A(B+C)) = \operatorname{tr}(AB + AC) = \operatorname{tr}(AB) + \operatorname{tr}(AC) = g(A,B) + g(A,C).$$

La (c) vale. Infatti, $\forall A, B \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ e $\forall c \in \mathbb{R}$,

$$g(cA, B) = \operatorname{tr}(cA \cdot B) = \operatorname{tr}(c(AB)) = c \cdot \operatorname{tr}(AB) = c \cdot g(A,B),$$

$$g(A, cB) = \operatorname{tr}(A \cdot cB) = \operatorname{tr}(c(AB)) = c \cdot \operatorname{tr}(AB) = c \cdot g(A,B).$$

Il prodotto scalare g non è definito positivo, perché la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$$

è non nulla, ma $A^2 = O$ per cui $g(A,A) = \operatorname{tr}(A^2) = 0$.

Il prodotto scalare g è non degenere. Infatti, se $C \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ è una matrice tale che $g(C,X) = O$ per ogni $X \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$, allora in particolare $g(C, C^T) = 0$ e quindi, ricordando la (6), si ha

$$0 = g(C, C^T) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} c_{ik} (C^T)_{ki} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} c_{ik} c_{ik} = \sum_{i,k=1}^{n} c_{ik}^2$$

per cui tutte le componenti di C devono essere nulle e dunque $C = O$.

Il complemento ortogonale del sottospazio delle matrici diagonali

$$\mathcal{D} = \left\{ \begin{bmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{bmatrix} : d_1, \ldots, d_n \in \mathbb{R} \right\}$$

è

$$
\begin{aligned}
\mathcal{D}^{\perp} &\stackrel{\text{def}}{=} \{A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}) :\ g(A,D) = 0 \ \ \forall D \in \mathcal{D}\} \\
&= \{A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}) :\ \operatorname{tr}(AD) = 0 \ \ \forall D \in \mathcal{D}\} \\
&= \{A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}) :\ \sum_{i=1}^{n} d_i a_{ii} = 0 \ \ \forall (d_1, ..., d_n) \in \mathbb{R}^n\} \\
&= \{A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}) :\ (a_{11}, ..., a_{nn}) \cdot (d_1, ..., d_n) = 0 \ \ \forall (d_1, ..., d_n) \in \mathbb{R}^n\} \\
&= \{A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}) :\ a_{11} = ... = a_{nn} = 0\},
\end{aligned}
$$

dove l'ultima uguaglianza vale perché, se un vettore $(a_{11}, ..., a_{nn})$ ha prodotto scalare nullo con tutti i vettori $(d_1, ..., d_n) \in \mathbb{R}^n$, allora in particolare ha prodotto scalare nullo con se stesso e dunque $a_{11}^2 + ... + a_{nn}^2 = 0$, cioè $a_{11} = ... = a_{nn} = 0$.

9. Innanzitutto, $B \notin r$ (le coordinate di B non soddisfano il sistema di equazioni (8)). Pertanto esiste ed è unica la retta s perpendicolare ad r e passante per B, che è quell'unica retta passante per B che interseca r ortogonalmente (cioè formando un angolo retto nel punto di incidenza). Indicando con $P = (a, b, c)$ il punto di incidenza di s su r, la retta s è la seguente:

$$
s = \{B + x(P - B) :\ x \in \mathbb{R}\}. \tag{7}
$$

Dalla (7) vediamo che, se determiniamo P, avremo automaticamente determinato anche s. Determiniamo dunque P. Il punto P soddisfa le seguenti condizioni:

$$
\begin{cases} P \in r \\ P - B \perp r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b + c = 0 \\ a - b + c = 4 \\ P - B \perp r \end{cases} \tag{8}
$$

Siccome, grazie al metodo di Gauss,

$$
\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ x - y + z = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 4 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 4 \\ 3y - z = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y - 4 \\ z = 3y + 8 \end{cases}
$$

deduciamo che

$$
\begin{aligned}
r &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ 2x + y + z = 0,\ x - y + z = 4\} = \{(-2y - 4, y, 3y + 8) :\ y \in \mathbb{R}\} \\
&= \{(-4, 0, 8) + y(-2, 1, 3) :\ y \in \mathbb{R}\}
\end{aligned}
$$

e quindi

$$
P - B \perp r \Leftrightarrow P - B \perp (-2, 1, 3) \Leftrightarrow (a, b - 1, c + 4) \cdot (-2, 1, 3) = 0 \Leftrightarrow -2a + b + 3c + 11 = 0.
$$

Pertanto, ricordando la (8), il punto $P = (a, b, c)$ soddisfa il seguente sistema lineare:

$$
\begin{cases} 2a + b + c = 0 \\ a - b + c = 4 \\ -2a + b + 3c + 11 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b + c = 4 \\ 2a + b + c = 0 \\ -2a + b + 3c = -11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b + c = 4 \\ 3b - c = -8 \\ -b + 5c = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b + c = 4 \\ -b + 5c = -3 \\ 3b - c = -8 \end{cases}
$$

$$
\Leftrightarrow \begin{cases} a - b + c = 4 \\ -b + 5c = -3 \\ 14c = -17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 30/14 \\ b = -43/14 \\ c = -17/14 \end{cases}
$$

Dunque $P = (30/14, -43/14, -17/14)$ e, per la (7),

$$s = \left\{(0,1,-4) + x\left(\frac{30}{14}, -\frac{57}{14}, \frac{39}{14}\right) :\, x \in \mathbb{R}\right\} = \{(0,1,-4) + t(30,-57,39) :\, t \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{(0,1,-4) + y(10,-19,13) :\, y \in \mathbb{R}\}.$$

10. Siccome, grazie al metodo di Gauss,

$$\begin{cases} x+y+3=0 \\ x+y-z+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+3=0 \\ -z-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x-3 \\ z=-2 \end{cases},$$

la retta r è data da

$$r = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\, y=-x-3,\ z=-2\} = \{(x,-x-3,-2) :\, x \in \mathbb{R}\} = \{P(x) :\, x \in \mathbb{R}\},$$

dove $P(x) \stackrel{\text{def}}{=} (x,-x-3,-2)$. Definiamo la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \|A - P(x)\|^2 = \|(1,0,1) - (x,-x-3,-2)\|^2 = 2x^2 + 4x + 19.$$

Siccome il minimo di $f(x)$ è raggiunto per $x=-1$ e vale $f(-1)=17$, si concludono due cose:

- la distanza di A da r è $\sqrt{17} = \sqrt{\min_{x\in\mathbb{R}} f(x)} = \sqrt{\min_{x\in\mathbb{R}} \|A-P(x)\|^2} = \min_{x\in\mathbb{R}} \|A-P(x)\|$;
- il punto di r che ha distanza minima da A è $P(-1) = (-1,-2,-2)$.

11. Ricordiamo che, dati un piano e una retta in $\mathbb{R}^3$, ci sono solo i tre casi seguenti:

- il piano e la retta non hanno punti in comune;
- il piano e la retta hanno un unico punto in comune;
- il piano e la retta hanno infiniti punti in comune.

Nel primo caso si dice che il piano è parallelo alla retta, nel secondo caso si dice che la retta è incidente al piano, nel terzo caso il piano contiene la retta.

(i) L'asse x è l'insieme dei punti $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tali che $\begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$. Nel fascio di piani dato, il piano parallelo all'asse x è quello che non ha punti in comune con l'asse x, ossia quello tale che il sistema

$$\begin{cases} kx+3y+(k-2)z=3k \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} \tag{9}$$

non ha soluzioni. Il sistema (9) è equivalente al sistema $\begin{cases} kx=3k \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$ e quindi ha sempre soluzione! Infatti, se $k \neq 0$ allora ha un'unica soluzione $(x,y,z) = (3,0,0)$, mentre se $k=0$ ha infinite soluzioni date da $(x,0,0)$, $x \in \mathbb{R}$. Conclusione: non esiste nessun piano nel fascio di piani dato che risulta parallelo all'asse x.

(ii) Nel fascio di piani dato, il piano parallelo alla retta assegnata (chiamiamola r) è quello che non ha punti in comune con r, ossia quello tale che il sistema

$$\begin{cases} kx + 3y + (k-2)z = 3k \\ 3x + 2y = 0 \\ z = 7 \end{cases} \tag{10}$$

non ha soluzioni. Il sistema (10) è equivalente al sistema

$$\begin{cases} kx + 3\left(-\frac{3}{2}x\right) + (k-2)\cdot 7 = 3k \\ y = -\frac{3}{2}x \\ z = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(k - \frac{9}{2}\right)x = -4k + 14 \\ y = -\frac{3}{2}x \\ z = 7 \end{cases}$$

e quindi il sistema (10) non ha soluzioni se e solo se l'equazione $\left(k - \frac{9}{2}\right)x = -4k + 14$ non ha soluzioni, cioè se e solo se

$$k - \frac{9}{2} = 0 \ \wedge \ -4k + 14 \neq 0 \Leftrightarrow k = \frac{9}{2} \ \wedge \ k \neq \frac{7}{2} \Leftrightarrow k = \frac{9}{2}.$$

Conclusione: nel fascio di piani dato, esiste un unico piano parallelo alla retta r ed è quello che si ottiene per $k = \frac{9}{2}$, i.e.

$$\left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \frac{9}{2}x + 3y + \left(\frac{9}{2} - 2\right)z = 3 \cdot \frac{9}{2} \right\} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 9x + 6y + 5z = 27 \right\}. \tag{11}$$

<u>Soluzione alternativa di (ii)</u>. La retta r assegnata è l'insieme dei punti dello spazio così fatto:

$$\begin{aligned} r &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\, 3x + 2y = 0,\ z = 7\} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, y = -\frac{3}{2}x,\ z = 7 \right\} \\ &= \left\{ \left(x, -\frac{3}{2}x, 7\right) |x \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ (0,0,7) + x\left(1, -\frac{3}{2}, 0\right) |x \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \{(0,0,7) + t\,(2,-3,0)\,|t \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Per ogni fissato $k \in \mathbb{R}$, il piano Π_k dato da $kx + 3y + (k-2)z = 3k$ è perpendicolare al vettore $(k, 3, k-2)$.[4] Pertanto, il piano Π_k è parallelo alla retta r se e solo se

$$\begin{aligned} &(2,-3,0)\cdot(k,3,k-2) = 0 \ \wedge \ \Pi_k \text{ non contiene } r \ \Leftrightarrow \ 2k - 9 = 0 \ \wedge \ \Pi_k \text{ non contiene } r \\ &\Leftrightarrow \ k = \frac{9}{2} \ \wedge \ \Pi_{9/2} \text{ non contiene } r \ \Leftrightarrow \ k = \frac{9}{2}, \end{aligned}$$

dove l'ultima equivalenza vale perché il piano $\Pi_{9/2}$ non contiene r: infatti il piano $\Pi_{9/2}$ è dato dalla (11) e non contiene ad esempio il punto $(0,0,7) \in r$. Conclusione: esiste un unico piano Π_k parallelo a r ed è $\Pi_{9/2}$. Ritroviamo così il risultato ottenuto con la prima soluzione.

[4] Infatti, il piano Π_k è l'insieme dei punti dello spazio così fatto:

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\, kx + 3y + (k-2)z = 3k\} = (0,k,0) + \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | kx + 3y + (k-2)z = 0\},$$

dove $(0,k,0)$ è una soluzione dell'equazione disomogenea $kx+3y+(k-2)z = 3k$, mentre $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | kx+3y+(k-2)z = 0\}$ è l'insieme delle soluzioni dell'omogenea associata $kx + 3y + (k-2)z = 0$ (ricordiamo che, in generale, dato un sistema di equazioni lineari, l'insieme delle sue soluzioni è la somma di una sua soluzione particolare, che nel nostro caso è $(0,k,0)$, con l'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo associato, che nel nostro caso è $kx + 3y + (k-2)z = 0$). Dalla scrittura appena ricavata per il piano Π_k vediamo che esso è parallelo al piano $kx + 3y + (k-2)z = 0$, il quale è perpendicolare a $(k,3,k-2)$, essendo precisamente l'insieme dei punti che hanno prodotto scalare nullo con $(k,3,k-2)$. Dunque anche Π_k è perpendicolare a $(k,3,k-2)$.

(iii) Come abbiamo visto nella seconda soluzione di (ii), per ogni fissato $k \in \mathbb{R}$, il piano Π_k dato da $kx + 3y + (k-2)z = 3k$ è perpendicolare al vettore $(k, 3, k-2)$. Analogamente, il piano Π dato da $2x - y + z - 23 = 0$ è perpendicolare al vettore $(2, -1, 1)$. Quindi Π_k è perpendicolare a Π se e solo se $(k, 3, k-2) \cdot (2, -1, 1) = 0 \Leftrightarrow 2k - 3 + k - 2 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{5}{3}$. Conclusione: nel fascio di piani Π_k, $k \in \mathbb{R}$, l'unico piano perpendicolare a Π è $\Pi_{5/3}$.