Analisi A — Settembre 2007

A. Sia data la funzione

$$f(x) = \exp\left(\frac{\log\left(e|x^2 + |x^2-1||\right)}{\log\left(e|x^2 - |x^2-1||\right)}\right) \tag{1}$$

1) Darne il dominio e il codominio.
2) Stabilire se $f(x)$ é pari, dispari o nessuno dei due.
3) Calcolarne i limiti per:

$$\begin{aligned} x &\to \pm 1^{\pm} \\ x &\to \pm \frac{1}{\sqrt{2}}^{\pm} \\ x &\to \pm \sqrt{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{e})}^{\pm} \\ x &\to \pm \sqrt{\frac{1}{2}(1+\frac{1}{e})}^{\pm} \end{aligned}$$

4) Calcolare la derivata prima di $f(x)$.
5) Calcolare i limiti di detta derivata per gli stessi casi di cui al punto 3).
6) Stabilire l'andamento di $f(x)$ per $x \to \pm\infty$.
7) Tracciare il grafico di $f(x)$ (non ci sono flessi).

B. Si calcolino i seguenti integrali:

$$\int_0^{\bar{x}} \frac{1}{x(\log^2 x + 1)} dx; \quad \bar{x} > 0$$

$$\int_{-\pi/2}^{\bar{x}} \frac{e^{\tan x}}{1-\sin^2 x} dx; \quad \bar{x} \in (-\pi/2, \pi/2).$$

SOLUZIONE

A.La funzione dipende solo da x^2; é quindi pari e possiamo limitare il nostro studio al caso $x \geq 0$.

La funzine é un esponenziale, il codominio é quindi $y \geq 0$

Cominciamo coll'esplicitare la funzione: sará

$$\begin{aligned} f(x) &= \exp\left(\frac{1}{\log\left(e(1-2x^2)\right)}\right) & 0 < x < \frac{1}{\sqrt{2}} \\ f(x) &= \exp\left(\frac{1}{\log\left(e(2x^2-1)\right)}\right) & \frac{1}{\sqrt{2}} < x < 1 \\ f(x) &= e(2x^2-1) & x > 1 \end{aligned}$$

In $0 < x < (1/\sqrt{2})$ la funzione diverge se il logaritmo va a zero, cioé se il suo argomento va a 1. Ció succede per $x = \sqrt{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{e})}$ che é nell'intervallo stesso. In $\frac{1}{\sqrt{2}} < x < 1$ la divergenza sará per la stessa ragione in $x = \sqrt{\frac{1}{2}(1+\frac{1}{e})}$ che anche in questo caso cade nell'intervallo stesso.

i limiti richiesti saranno allora:

$$\begin{aligned}
\lim\,(f(x))_{x\to 1^+} &= e^+\\
\lim\,(f(x))_{x\to 1^-} &= e^+\\
\lim\,(f(x))_{x\to \frac{1}{\sqrt{2}}^+} &= 1^-\\
\lim\,(f(x))_{x\to \frac{1}{\sqrt{2}}^-} &= 1^-\\
\lim\,(f(x))_{x\to \sqrt{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{e})}^+} &= 0\\
\lim\,(f(x))_{x\to \sqrt{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{e})}^-} &= +\infty\\
\lim\,(f(x))_{x\to \sqrt{\frac{1}{2}(1+\frac{1}{e})}^+} &= +\infty\\
\lim\,(f(x))_{x\to \sqrt{\frac{1}{2}(1+\frac{1}{e})}^-} &= 0
\end{aligned}$$

vediamo quindi che il dominio é $\mathbf{R} - \left\{\sqrt{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{e})}, \sqrt{\frac{1}{2}(1+\frac{1}{e})}\right\}$.
Calcoliamo ora la derivata prima nei vari casi:

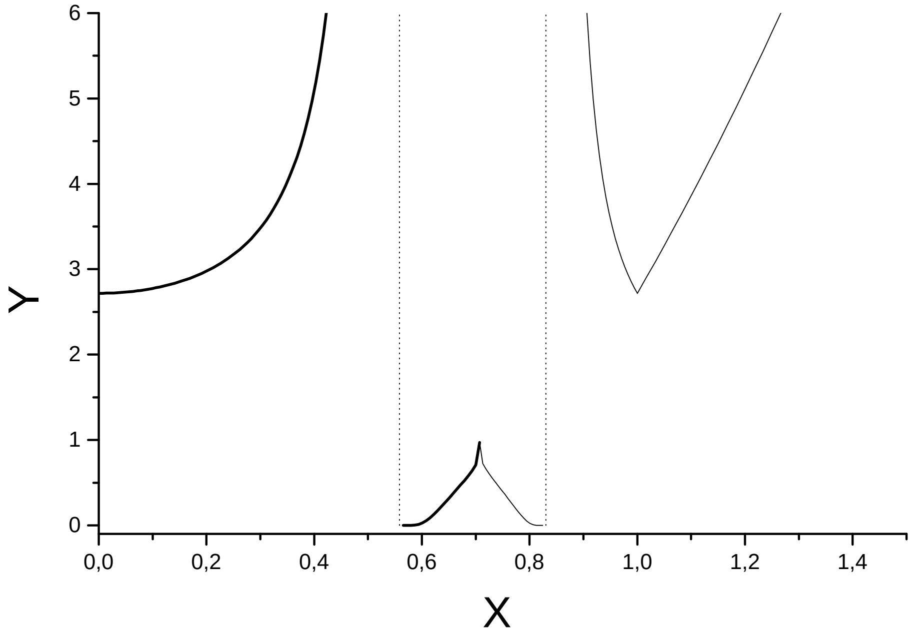
$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{\exp\left(\frac{1}{\log\,(e(1-2x^2))}\right)}{\log^2\,(e(1-2x^2))}\frac{4ex}{e(1-2x^2)} && 0 < x < \frac{1}{\sqrt{2}}\\
f'(x) &= -\frac{\exp\left(\frac{1}{\log\,(e(2x^2-1))}\right)}{\log^2\,(e(2x^2-1))}\frac{4ex}{e(2x^2-1)} && \frac{1}{\sqrt{2}} < x < 1\\
f'(x) &= 4ex && x > 1
\end{aligned}$$

I limiti saranno quindi:

$$\begin{aligned}
\lim\,(f'(x))_{x\to 1^+} &= 4e\\
\lim\,(f'(x))_{x\to 1^-} &= -4e\\
\lim\,(f'(x))_{x\to \frac{1}{\sqrt{2}}^+} &= -\infty\\
\lim\,(f'(x))_{x\to \frac{1}{\sqrt{2}}^-} &= +\infty\\
\lim\,(f'(x))_{x\to \sqrt{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{e})}^+} &= 0\\
\lim\,(f'(x))_{x\to \sqrt{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{e})}^-} &= +\infty\\
\lim\,(f'(x))_{x\to \sqrt{\frac{1}{2}(1+\frac{1}{e})}^+} &= -\infty\\
\lim\,(f'(x))_{x\to \sqrt{\frac{1}{2}(1+\frac{1}{e})}^-} &= 0
\end{aligned}$$

In conclusione il grafico della funzione é quello dato alla pagina seguente:

B. Gli integrali possono essere ricondotti ad integrali noti attraverso le sostituzioni $t = \log x$ e$t = \tan x$.



Y
X
0
1
2
3
4
5
6
0,0
0,2
0,4
0,6
0,8
1,0
1,2
1,4