Algebra lineare — Settembre 2007

Sia data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2k(k-q) & 2(k-q)(1-k) & 2k(k-q) \\ 0 & (k-q)(k-2q) & 0 \\ 2(k-q) & (k-1)(k^2-q^2) & 2(k-q) \end{bmatrix}$$

dove q é l'ultima cifra del vostro numero di matricola e k é un parametro reale.

1) Trovare il rango di A e la dimensione del suo nucleo al variare del parametro k.

2) Indicare, al variare del parametro k, il significato geometrico dell'immagine e del nucleo di A.

3) Calcolare autovalori e **autovettori** di A al variare del parametro k.

4) Per che valori di k la matrice A é diagonalizzabile con autovalori reali?

5) Esistono valori di k per cui gli autovettori sono -o possono essere scelti- perpendicolari? Trovare i vari casi.

Un grafico dell'andamento degli elementi della matrice in funzione di k potrebbe essere utile a chiarire le idee.

SOLUZIONE

La matrice é della forma

$$A = \begin{bmatrix} x & y & x \\ 0 & z & 0 \\ t & w & t \end{bmatrix}$$

L'equazione agli autovalori é quindi

$$\lambda(z-\lambda)[\lambda-(x+t)] = 0$$

e gli aurovalori sono

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0 \\ \lambda_2 &= z = (k-q)(k-2q) \\ \lambda_3 &= x+t = 2(k+1)(k-q) \end{aligned}$$

I corrispondenti autovettori (non normalizzati) sono:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} (t-z)y - xw \\ xt - (t-z)(x-z) \\ (x-z)w - yt \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ t \end{bmatrix}, \tag{1}$$

Abbiamo quindi nel caso generico rango 2 ed un nucleo di dimensione 1 (un autovalore é sempre 0); l'immagine é un piano e il nucleo una retta; la matrice é diagonalizzabile dato che gli autovalori sono distinti.

Per $k = q$ il rango é zero e la dimensione del nucleo é 3 (tutti e tre gli autovalori sono nulli), il nucleo é tutto lo spazio $\mathbf{R}^3$ e l'immagine é l'origine; tutti gli elementi della matrice sono nulli, la matrice é quindi banalmente diagonalizzabile e gli autovettori possono essere scelti perpendicolari.

Perché la matrice sia simmetrica, sia y che w devono essere nulli; questo accade solo per $k = q$, che abbiamo giá visto, e per $k = 1$; in questo caso abbiamo anche $x = t$ e la matrice é simmetrica e quindi diagonalizzabile con autovettori perpendicolari. V_1 e V_3 sono perpendicolari solo se $x = t$, quindi i soli casi di autovettori perpendicolari sono $k = q$ e $k = 1$.

Ci restano da analizzare i casi $k = 2q$ e $k = -1$ (per cui due autovalori sono nulli) e $k = -2(q+1)$ (per cui $\lambda_2 = \lambda_3$).

Per $k = -1$ abbiamo $x = -t$; ció significa che non solo $\lambda_1 = \lambda_3$ ma anche $V_1 = V_3$. Ne segue che il nucleo é ancora di dimensione 1 e che la matrice non é diagonalizzabile.

Per $k = 2q$ abbiamo che

$$v_2 = \begin{bmatrix} ty - xw \\ 0) \\ -(ty - xw) \end{bmatrix}; \qquad (2)$$

ció significa che non solo $\lambda_1 = \lambda_2$ ma anche $V_1 = V_2$. Ne segue che il nucleo é ancora di dimensione 1 e che la matrice non é diagonalizzabile (c'é l'eccezione del caso $k = 1$ ($q = 1/2$) per cui $ty - xw = 0$, ma q non é in tal caso un intero tra 0 e 9).

Per $k = -2(q+1)$ abbiamo che

$$v_2 = \begin{bmatrix} -x(w + y) \\ 0) \\ -t(w + y) \end{bmatrix}; \qquad (3)$$

ció significa che non solo $\lambda_2 = \lambda_3$ ma anche $V_2 = V_3$. Ne segue che il nucleo é ancora di dimensione 1 e che la matrice non é diagonalizzabile (di nuovo c'é l'eccezione dei casi $k = 1$ ($q = -3/2$) e $k = 6$ ($q = -4$) per cui $w + y = 0$, ma di nuovo q non é in un intero tra 0 e 9).