ALGEBRA LINEARE
Dicembre 2005

Si trovino autovalori ed autovettori della matrice

$$A = \begin{bmatrix} (2-k) & -\sqrt{3}k & k \\ -\sqrt{3}k & \frac{3}{4}(2-k) & -\frac{\sqrt{3}}{4}(2-k) \\ k & -\frac{\sqrt{3}}{4}(2-k) & \frac{1}{4}(2-k) \end{bmatrix} \tag{1}$$

E' diagonalizzabile? I suoi autovettori sono perpendicolari o no?

Qual'é il suo rango al variare del parametro k? Si descrivano, al variare del parametro k, nucleo ed immagine della mappa lineare su $\mathbf{R}^3$ rappresentata dalla matrice data e se ne diano delle basi.

SOLUZIONE

L'equazione caratteristica é:

$$det(A-\lambda 1) = det \begin{bmatrix} (2-k)-\lambda & -\sqrt{3}k & k \\ -\sqrt{3}k & \frac{3}{4}(2-k)-\lambda & -\frac{\sqrt{3}}{4}(2-k) \\ k & -\frac{\sqrt{3}}{4}(2-k) & \frac{1}{4}(2-k)-\lambda \end{bmatrix} =_{C_2\to C_2+\sqrt{3}C_3}$$

$$= det \begin{bmatrix} (2-k)-\lambda & 0 & k \\ -\sqrt{3}k & -\lambda & -\frac{\sqrt{3}}{4}(2-k) \\ k & -\sqrt{3}\lambda & \frac{1}{4}(2-k)-\lambda \end{bmatrix} =_{C_2\to R_2+\sqrt{3}R_3}$$

$$= det \begin{bmatrix} (2-k)-\lambda & 0 & k \\ 0 & -4\lambda & -\sqrt{3}\lambda \\ k & -\sqrt{3}\lambda & \frac{1}{4}(2-k)-\lambda \end{bmatrix} = -\lambda[\lambda^2 - 2\lambda(2-k) + (2-k)^2 - 4k^2] = 0, \tag{2}$$

che ha soluzioni $\lambda_1 = 2+k$, $\lambda_2 = 2-3k$, $\lambda_3 = 0$. Casi degeneri sono $k=0$, per cui $\lambda_1 = \lambda_2$, $k=-2$, per cui $\lambda_1 = \lambda_3$, e $k = 2/3$, per cui $\lambda_1 = \lambda_3$.

Gli autovettori relativi sono le colonne della matrice

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}. \tag{3}$$

In dettaglio: per $\lambda = 2+k$ sará

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2k & -\sqrt{3}k & k \\ -\sqrt{3}k & -\frac{1}{2}-\frac{7k}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4}(2-k) \\ k & -\frac{\sqrt{3}}{4}(2-k) & -\frac{3}{2}-\frac{5k}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \tag{4}$$

usiamo Gauss: le sostituzioni $R_2 \to R_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}R_1$ e $R_3 \to R_3 + \frac{1}{2}R_1$ ci danno

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2k & -\sqrt{3}k & k \\ 0 & -\frac{1}{4}(2+k) & -\frac{\sqrt{3}}{4}(2+k) \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{4}(2+k) & -\frac{3}{4}(2+k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \tag{5}$$

la sostituzione $R_3 \to R_3 - \sqrt{3}R_2$ elimina la terza riga. Dividendo poi ogni riga per i fattori comuni, si ottiene

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -\sqrt{3} & 1 \\ 0 & 1 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \tag{6}$$

da cui é immediato ricavare

$$
\begin{aligned}
x &= 2z \\
y &= -\sqrt{3}z
\end{aligned} \tag{7}
$$

scegliendo, al fine della normalizzazione $z = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, si ottiene la prima colonna di Q.

Per $\lambda = 2 - 3k$ sará

$$
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2k & -\sqrt{3}k & k \\ -\sqrt{3}k & -\frac{1}{2} + \frac{9k}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4}(2-k) \\ k & -\frac{\sqrt{3}}{4}(2-k) & -\frac{3}{2} + \frac{11k}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \tag{8}
$$

usiamo Gauss: le sostituzioni $R_2 \to R_2 + \frac{\sqrt{3}}{2} R_1$ e $R_3 \to R_3 - \frac{1}{2} R_1$ ci danno

$$
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2k & -\sqrt{3}k & k \\ 0 & -\frac{1}{4}(2-3k) & -\frac{\sqrt{3}}{4}(2-3k) \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{4}(2-3k) & -\frac{3}{4}(2-3k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \tag{9}
$$

la sostituzione $R_3 \to R_3 - \sqrt{3} R_2$ elimina la terza riga. Dividendo poi ogni riga per i fattori comuni, si ottiene

$$
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -\sqrt{3} & 1 \\ 0 & 1 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \tag{10}
$$

da cui é immediato ricavare

$$
\begin{aligned}
x &= -2z \\
y &= -\sqrt{3}z
\end{aligned} \tag{11}
$$

scegliendo, al fine della normalizzazione $z = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$, si ottiene la seconda colonna di Q.

Per $\lambda = 0$, infine, sará

$$
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2-k) & -\sqrt{3}k & k \\ -\sqrt{3}k & \frac{3}{4}(2-k) & -\frac{\sqrt{3}}{4}(2-k) \\ k & -\frac{\sqrt{3}}{4}(2-k) & \frac{1}{4}(2-k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \tag{12}
$$

usiamo Gauss: la sostituzione $R_3 \to R_3 + \sqrt{3} R_2$ elimina la terza riga. A questo punto il modo piú veloce di procedere é la sostituzione $R_2 \to R_2 + \frac{\sqrt{3}(2-k)}{4k} R_2$ per cui si ottiene

$$
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2-k) & -\sqrt{3}k & k \\ -\frac{\sqrt{3}}{4k}(3k-2)(k+2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \tag{13}
$$

Poiché $(3k-2)(k+2)$ si annulla solo nei casi degeneri $k = -2$ e $k = 2/3$ che tratteremo a parte, la seconda riga significa che per il caso generico $x = 0$; la prima riga ci dice allora

$$
z = \sqrt{3}y \tag{14}
$$

scegliendo, al fine della normalizzazione $y = -\frac{1}{2}$, si ottiene la terza colonna di Q.

Restano i casi degeneri, ma é immediato verificare che per $k = 0$ ($\lambda_1 = \lambda_2 = 2$), gli autovettori relativi all'autovalore $\lambda = 2$ devono verificare la singola equazione $y = -\sqrt{3}z$ (due parametri liberi), verificata dai due autovettori trovati per λ_1 e λ_2. Per $k = -2$ ($\lambda_1 = \lambda_3 = 0$), l'equazione che deve essere verificata dagli autovettori di λ_1 e λ_3 é $z = 2x + \sqrt{3}y$: di nuovo due parametri liberi e di nuovo i due autovettori trovati la verificano. Idem per $k = 2/3$.

Avendo tre autovettori sempre distinti, la matrice é diagonalizzabile; cosa d'altronde nota dal fatto che e' simmetrica. Si verifica facilmente che gli autovettori sono perpendicolari, pure noto dal fatto che la matrice é simmetrica, gli autovettori sono indipendenti da k e i tre autovalori sono in generale distinti.

Il rango della matrice A é uguale al numero di autovalori diversi da zero, sará quindi 1 per $k = 2/3$ e $k = -2$, e 2 altrimenti.

Il nucleo é generato dagli autovettori relativi agli autovalori nulli; l'immagine, dagli altri autovettori.