ALGEBRA LINEARE
Gennaio 2006

Si trovino autovalori ed autovettori della matrice

$$A = \begin{bmatrix} (k-3) & (4-2k) \\ -4 & (5-k) \end{bmatrix} \tag{1}$$

E' diagonalizzabile? I suoi autovettori sono perpendicolari? sempre, mai o in che casi?

Qual'é il suo rango al variare del parametro k? Si descrivano, al variare del parametro k, nucleo ed immagine della mappa lineare su $\mathbf{R}^2$ rappresentata dalla matrice data e se ne diano delle basi.

SOLUZIONE

L'equazione caratteristica é:

$$\lambda^2 - 2\lambda + (1-k^2) = 0, \tag{2}$$

che ha soluzioni $\lambda_1 = 1-k$, $\lambda_2 = 1+k$.

Gli autovettori relativi sono le colonne della matrice

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & (k-2) \\ 1 & -2 \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Per $k \neq 0$ gli autovalori sono distinti e la matrice é diagonalizzabile; gli autovettori sono perpendicolari per $k = 4$.

Il determinante di A é $(1-k^2)$; il rango della matrice A é quindi uguale a 2 per $k \neq \pm 1$; in tal caso il nucleo é vuoto e l'immagine é tutto $\mathbf{R}^2$.

Per $k = 1$ il nucleo é generato dall'autovettore $(1, 1)$, per cui l'immagine é generata dall'altro autovettore $(1, 2)$.

Per $k = -1$ il nucleo é generato dall'autovettore $(3, 2)$, per cui l'immagine é generata dall'altro autovettore $(1, 1)$.