

ALGEBRA LINEARE
Aprile 2006

Trovare nucleo ed immagine della matrice

$$B = \begin{bmatrix} (2-k) & -\sqrt{2}k & \sqrt{2}k \\ -\sqrt{2}k & \frac{(2-k)}{2} & -\frac{(2-k)}{2} \\ \sqrt{2}k & -\frac{(2-k)}{2} & \frac{(2-k)}{2} \end{bmatrix} \quad (1)$$

al variare del parametro reale k , darne delle basi ed indicarne il significato geometrico.
La matrice B é diagonalizzabile? Quali sono i suoi autovalori? I suoi autovettori?

SOLUZIONE

I tre vettori (autovettori di B corrispondenti ai tre autovalori $(k+2)$, $(2-3k)$, e 0)

$$v_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \quad (2)$$

formano una base di \mathbf{R}^3 ; per $k = -2$, il rango é 1, il nucleo é generato da v_1 e v_3 , l'immagine da v_2 ; per $k = 2/3$, il rango é ancora 1, ma il nucleo é generato da v_2 e v_3 , mentre l'immagine é generata da v_1 ; in tutti gli altri casi il rango é 2, il nucleo é generato da v_3 , l'immagine da v_1 e v_2 .

Un sottospazio di \mathbf{R}^3 di dimensione 1 (generato cioé da un singolo vettore) é una retta passante per l'origine; un sottospazio di \mathbf{R}^3 di dimensione 2 (generato cioé da due vettori) é un piano passante per l'origine.