ALGEBRA LINEARE
Giugno 2006

Si riconosca il significato geometrico delle matrici

$$R_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

e

$$R_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}; \tag{2}$$

si costruisca la matrice $P = R_1 R_2$ e quindi la matrice $B = PAP^{-1}$ dove

$$A = \begin{bmatrix} (2-k) & -\sqrt{3}k & k \\ -\sqrt{3}k & \frac{3}{4}(2-k) & -\frac{\sqrt{3}}{4}(2-k) \\ k & -\frac{\sqrt{3}}{4}(2-k) & \frac{1}{4}(2-k) \end{bmatrix}; \tag{3}$$

si costruisca infine l'eqazione quadratica

$$[x, y, z]B \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 1. \tag{4}$$

si discuta il suo significato al variare del parametro k.

SOLUZIONE

Le matrici R_1 e R_2 rappresentano delle rotazioni (di $\pi/4$ e $\pi/3$ rispettivamente); il loro prodotto é

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}. \tag{5}$$

La matrice B é la matrice diagonale degli autovalori di A e l'equazione quadratica risulta essere

$$x^2(2+k) + y(2-3k) = 1. \tag{6}$$

Rappresenta quindi un'ellisse per $-2 < k < 2/3$ (un cerchio per $k = 0$), si riduce a due rette per $k = -2$ o $k = 2/3$, ed infine rappresenta un'iperbole per tutti gli altri valori di k.