ALGEBRA LINEARE
Settembre 2006

Si consideri l'applicazione $f : \mathbf{R}^4 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ definita sulle rispettive basi naturali dalla matrice

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -1 & -5 & -5 \\ 9 & 1 & -3 & -7 \\ 8 & 0 & -4 & -6 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Si risponda alle seguenti domande:
1)L'applicazione f é un isomorfismo? Giustificare la risposta.
2) di che rango é la matrice A?
3a) di che dimensione é il suo nucleo? Giustificare la risposta.
3b) se ne trovi una base ortogonale.
4a) di che dimensione é la sua immagine? Giustificare la risposta.
4b) se ne trovi una base ortogonale.
5) E' invertibile a destra? Giustificare la risposta e se sí, trovare l'inversa o le inverse.
6) E' invertibile a sinistra? Giustificare la risposta e se sí, trovare l'inversa o le inverse.

SOLUZIONE

La risposta alla prima domanda é immediata: NO, in quanto spazio di arrivo e spazio di partenza sono di dimensioni diverse.
In pochi semplici passaggi, la matrice pu essere portata alla forma triangolare alta:

$$\begin{bmatrix} 7 & -1 & -5 & -5 \\ 0 & 4 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Ció ci permette di dire che il rango r della matrice é 2, e che quindi l'immagine ha dimensione 2; cosí pure il nucleo, la cui dimensione $4 - 2 = 2$.
Il nucleo é la controimmagine del vettore nullo di $\mathbf{R}^3$, é cioé lo spazio dei vettori

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}. \tag{3}$$

di $\mathbf{R}^4$ soluzioni dell'equazione

$$A\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

E' facile trovare che il loro sottospazio é generato dai due vettori

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, e \quad v_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \tag{5}$$

che sono giá ortogonali.
La base dell'immagine si ottiene usando Gauss sulle COLONNE di A: pochi passaggi ci portano da A a

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{6}$$

una base dell'immagine é quindi

$$v_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, e \qquad v_6 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \tag{7}$$

di nuovo ortogonale.

La matrice A non ha inversa a destra: le tre colonne (di quattro elementi) di tale matrice sarebbero la controimmagine dei tre vettori della base naturale di $\mathbf{R}^3$ che non appartengono all'immagine di f.

Inversa a sinistra: le quattro righe $\bar{x}_i$ di tale matrice devono verificare ciascuna l'equazione

$$A^T \bar{x}_i = e_i. \tag{8}$$

dove gli e_i sono gli elementi della base naturale di $\mathbf{R}^4$ e A^T é la trasposta di A:

$$A^T = \begin{bmatrix} 7 & 9 & 8 \\ -1 & 1 & 0 \\ -5 & -3 & -4 \\ -5 & -7 & -6 \end{bmatrix}. \tag{9}$$

ma dato che il rango di A^T é lo stesso di quello di A, che é 2, non tutti gli e_i possono appartenere alla sua immagine. Quindi A non ha neanche inversa sinistra.