ALGEBRA LINEARE
Dicembre 2006

Sia data la matrice

$$B = \begin{bmatrix} \frac{(1+k)}{2} & \frac{\sqrt{3}(k-1)}{4} & \frac{(1-k)}{4} \\ \frac{\sqrt{3}(k-1)}{4} & \frac{(k+3)}{8} & -\frac{\sqrt{3}(1+3k)}{8} \\ \frac{(1-k)}{4} & -\frac{\sqrt{3}(1+3k)}{8} & \frac{(1-5k)}{8} \end{bmatrix}. \tag{1}$$

1) Si calcoli il determinante della matrice.
2) Si calcoli il rango al variare del parametro reale k.
3) La matrice é diagonalizzabile? Perché?
4) Se sí, posso dire qualcosa su autovalori ed autovettori semplicemente guardando la matrice? Cosa?
5) Si calcolino autovalori ed autovettori. Per quali valori di k ci sono autovalori degeneri? Verificate che autovalori ed autovettori trovati siano in accordo con le vostre risposte alle domande precedenti

SOLUZIONE

1) Il determinante é $-k^2$: applicazione diretta del metodo di Laplace é sconsigliabile, dato che la matrice é piena; d'altro canto, la sostituzione $C_2 \to C_2 + \sqrt{3}C_3$ seguita dalla sostituzione $R_2 \to R_2 + \sqrt{3}R_3$ ci dá la matrice

$$\begin{bmatrix} \frac{(1+k)}{2} & 0 & \frac{(1-k)}{4} \\ 0 & -4k & -\sqrt{3}k \\ \frac{(1-k)}{4} & -\sqrt{3}k & \frac{(1-5k)}{8} \end{bmatrix}, \tag{2}$$

che ha due zeri. Il metodo di Laplace applicato a quest'ultima matrice ci dá il determinante

$$\frac{1+k}{2}\left(-4k\frac{1-5k}{8} - 3k^2\right) + \frac{k}{4}(k-1)^2 = \frac{k}{4}\left[(k-1)^2 - (k+1)^2\right] = -k^2. \tag{3}$$

2) Dalla risposta al punto (1) si evince che il rango é 3 per $k \neq 0$. Sostituendo $k = 0$ nella matrice B si verifica immediatamente che in tal caso il rango é 1, dato che la seconda colonna é uguale alla prima moltiplicata per $-\sqrt{3}/2$ e la terza é di nuovo la prima, moltiplicata per $1/2$.
3) La matrice B é simmetrica, quindi diagonalizzabile.
4) Per la stessa ragione, gli autovalori sono reali e autovettori corrispondenti ad autovalori distinti sono perpendicolari.
5) La stessa procedura del punto 1, applicata a $B - \lambda 1$ ci dá la matrice

$$B' = \begin{bmatrix} \frac{(1+k)}{2} - \lambda & 0 & \frac{(1-k)}{4} \\ 0 & -4(k+\lambda) & -\sqrt{3}(k+\lambda) \\ \frac{(1-k)}{4} & -\sqrt{3}(k+\lambda) & \frac{(1-5k)}{8} - \lambda \end{bmatrix}, \tag{4}$$

il cui determinante é

$$\left(\frac{1+k}{2} - \lambda\right)\left[-4(k+\lambda)\left(\frac{1-5k}{8} - \lambda\right) - 3(k+\lambda)^2\right] + \frac{k+\lambda}{4}(k-1)^2. \tag{5}$$

RACCOGLIENDO $(k+\lambda)/4$ si ottiene

$$\frac{k+\lambda}{4}\left[(1+k-2\lambda)(-1+5k+8\lambda-6k-6\lambda) + (k-1)^2\right], \tag{6}$$

che diviene

$$\frac{k+\lambda}{4}\left[-(1+k-2\lambda)^2 + (k-1)^2\right] = (k+\lambda)(k-\lambda)(\lambda-1) \tag{7}$$

Gli autovalori sono quindi 1, k e $-k$, in accordo col valore trovato per il determinante.

Avremo perció autovalori degeneri per $k = 0, 1, -1$.

Gli autovettori relativi si calcolano sostituendo gli autovalori trovati nella matrice $B - \lambda 1$ (NON nella matrice modificata B') e risolvendo (col metodo di Gauss) il relativo sistema lineare. Si trova cosí che gli autovettori sono le colonne della matrice

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Si verifica immediatamente che sono perpendicolari tra loro, come previsto al punto 4). Sono inoltre costanti, non c'é quindi bisogno di ortogonalizzare gli autovettori relativi agli autovalori degeneri nei casi particolari $k = 0, 1, -1$.