ALGEBRA LINEARE
Gennaio 2007

Sia data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} (k+8) & (k+q-2) \\ (2k-q+3) & k \end{bmatrix}$$

dove q é l'ultima cifra del vostro numero di matricola e k é un parametro reale

1) trovare il rango di A al variare del parametro k.
2) Per che valori di k la matrice A é diagonalizzabile con autovalori reali?
3) Esistono valori di k per cui gli autovettori sono perpendicolari?
4) Trovare k tale che la matrice sia simmetrica.
5) Si definisca il carattere della conica data dall' equazione

$$[x,y]A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 1.$$

per il valore di k trovato al punto 4).

6) Trovare esplicitamente gli autovettori della matrice.

SOLUZIONE

1) Il determinante di A é dato da

$$detA = -k^2 + k(9-q) + q^2 - 5q + 6,$$

che si annulla per

$$k = \frac{9 - q \pm \sqrt{5q^2 - 38q + 105}}{2}. \tag{1}$$

Poiché l'espressione sotto radice in eq. (1) é sempre positiva, i valori di k per cui il determinante si annulla sono reali. Per valori esterni il determinante sará negativo e gli autovalori saranno di segno opposto; per valori interni il determinante sará positivo e gli autovalori saranno di ugual segno; in ambedue i casi il rango della matrice é 2. Per i valori per cui il determinante si annulla avremo infine almeno un autovalore nullo; il rango sará quindi minore di 2, ma dato che non esiste valore di k per cui si annullino tutti gli elementi della matrice, il rango deve essere 1.

2) gli autovalori della matrice A sono:

$$\lambda_\pm = k + 4 \pm \sqrt{\Delta}$$
$$\Delta = 2k^2 - k(1-q) + 10 + 5q - q^2.$$

Dobbiamo quindi verificare che Δ sia positivo o nullo. Δ é positivo per valori esterni a

$$k_\pm = \frac{1 - q \pm \sqrt{9q^2 - 42q - 79}}{4}. \tag{2}$$

che sono reali se $9q^2 - 42q - 79 > 0$, cioé per valori di q esterni a

$$q_\pm = \frac{21 \pm \sqrt{9q^2 - 42q - 79}}{4}. \tag{3}$$

cioé esterni a $q_+ \simeq 6.1$ e $q_- \simeq -1.4$. Quindi, se avete $q \leq 6$, i due valori $k_\pm$ sono complessi, Δ é sempre positivo, gli autovalori sono distinti e la matrice é diagonalizzabile con autovalori reali.

Se invece $q > 6$, i due valori $k_\pm$ sono reali, Δ é positivo solo per valori esterni di k; e solo in questo caso gli autovalori sono distinti e la matrice é diagonalizzabile con autovalori reali. In tal caso bisognerebbe anche controllare i due casi $k = k_\pm$ corrispondenti ad autovalori degeneri: l'autospazio associato ha dimensione 1, quindi, in tal caso, la matrice non é diagonalizzabile.

3) sappiamo che se la matrice é simmetrica e con autovalori non degeneri, gli autovettori sono perpendicolari, quindi per $k = 2q - 5$ gli autovettori sono perpendicolari. Gli autovalori corrispondenti sono:

$$\lambda_{\pm} = 2q - 1 \pm \sqrt{\Delta}$$
$$\Delta = 8q^2 - 42q + 65.$$

che sono sempre reali.

4) la risposta é giá stata data al punto precedente: $k = 2q - 5$

5) per $k = 2q - 5$ abbiamo

$$\lambda_{\pm} = 2q - 1 \pm \sqrt{\Delta},$$

da cui otteniamo che solo nel caso $q = 0$ é possibile che ambedue gli autovalori siano negativi e che quindi la conica non esista. Inoltre

$$detA = -5q^2 + 38q - 64,$$

che é positivo per valori interni a

$$q_{1,2} = \frac{19 \pm \sqrt{41}}{5}. \tag{4}$$

cioé per valori interni all'intervallo $(2.5, 5.1)$. se q é in tale intervallo, gli autovalori hanno lo stesso segno e la conica é una ellisse (non possono essere ambedue negativi perché 0 é al di fuori di tale intervallo), in caso contrario é una iperbole.

6) Se gli autovalori sono stati calcolati correttamente, le due equazioni del sistema $(A - \lambda_i \mathbf{1})\bar{\mathbf{v}}_{\mathbf{i}}$, $i = 1, 2$, sono linearmente dipendenti (sempre una buona idea controllare!); ci basta quindi prendere la prima delle equazioni per ottenere per ciascun autovalore il corrispondente autovettore.