

## La diffrazione della luce

*Diffrazione: combinazione di scattering (diffusione) ed interferenza.*

E' facilmente interpretabile utilizzando le proprietà ondulatorie della radiazione (e della materia!) e la costruzione di Huygens  
**(ondicine – wavelets)**

Si osserva diffrazione:

1. per luce verde ( $\lambda$  ca. 0.5  $\mu\text{m}$ ) attraverso un tessuto con spaziatura tipica  $a$  di 0.25 mm ( $a/\lambda$  ca. 500)
2. per elettroni ( $E_K$  ca. 100 kV) attraverso un cristallo ( $a$  tipicamente di 0.5-2 nm) ( $a/\lambda$  ca. 100)
3. per raggi X ( $\lambda$  ca. 0.1 nm = 1 Å) attraverso un cristallo ( $a$  tipicamente di 0.5-2 nm) ( $a/\lambda$  ca. 5-20)

I relativi raggi diffratti sono deviati di un angolo  $\theta$  molto piccolo nei casi 1 e 2, ma in modo significativo (anche di 150°!) nel caso 3. Quando la lunghezza d'onda di una radiazione è paragonabile alla dimensione tipica del 'reticolo di diffrazione', gli angoli  $\theta$  sono molto alti (e, quindi, facilmente misurabili).

Un tipico esperimento di diffrazione prevede quindi di misurare la *geometria* della diffrazione, l'*intensità* della radiazione diffratta, l'*allargamento di linea* dei picchi di diffrazione e la presenza di '*riflessi satelliti*'.

La misura di queste quantità permette di ricostruire la natura dell'oggetto diffrangente, in termini di dimensioni, periodicità, *forma*, estensione (tridimensionale!) e deviazioni dall'idealità.

*In ottica*, una sequenza periodica di fenditure in un corpo opaco è un:

**Reticolo mono-dimensionale (Cristallo periodico in una dimensione):**

La spaziatura tra le fenditure (periodicità del reticolo) determina la **geometria dei raggi diffratti o geometria del pattern di diffrazione**.

La larghezza della fenditura, per ogni direzione di raggio diffratto, determina la somma totale dell'interferenza di tutte le ondine di Huygens e contribuisce all'**intensità totale del raggio diffratto**, direzione per direzione. Ovvero, l'intensità dipende dalla **forma** dell'oggetto diffrangente, non dalla sua **periodicità**.

Il numero totale di fenditure determina invece il numero ed intensità di riflessi ancillari, detti **satellite**. Maggiore è il numero di fenditure, minore l'intensità dei satelliti. In pratica:

1. Per reticoli di diffrazione 'infiniti' (cristalli reali) e diffrazione di raggi X, i satelliti sono praticamente *invisibili*
2. Per reticoli di diffrazione finiti (10-1000 strati in film sottili), i satelliti sono numerosi ed osservabili
3. Per reticoli ottici tradizionali (costruiti meccanicamente con  $a$  di frazioni di mm), i satelliti sono numerosi ed osservabili

In generale, la relazione fra forma e dimensione di un oggetto e il suo *pattern di diffrazione* è conosciuta matematicamente come **Trasformata di Fourier**: essa trasforma una funzione che contiene variabili  $\mathbf{x}$  (tipicamente distanze in un oggetto o vettori *spostamento*) in una funzione le cui variabili sono i reciproci di  $\mathbf{x}$ , ovvero  $\mathbf{x}^{-1}$  [1/(vettore *spostamento*)].

**In particolare: Il reticolo RECIPROCO è la TRASFORMATA di FOURIER del reticolo REALE o DIRETTO.**

In pratica:

- Il pattern di diffrazione di un oggetto è la **visualizzazione** dell'*immagine* della trasformata di Fourier dell'oggetto, generata per diffrazione di luce visibile, raggi X od elettroni.
- Per luce visibile, si parla di TRASFORMATA OTTICA.

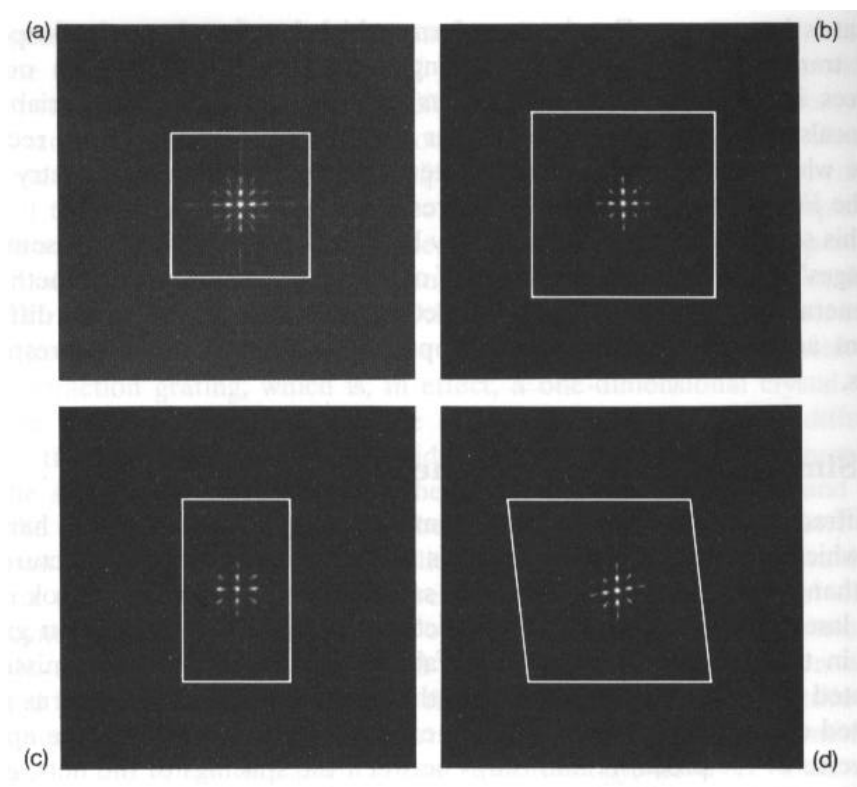
## Semplici osservazioni di diffrazione con luce visibile

1. Diffrazione di luce da sorgente lontana attraverso tessuti.
2. Diffrazione di luce da sorgente puntiforme attraverso tessuti.
3. Diffrazione di luce da sorgente policromatica su oggetti periodici (righello graduato in **riflessione**).

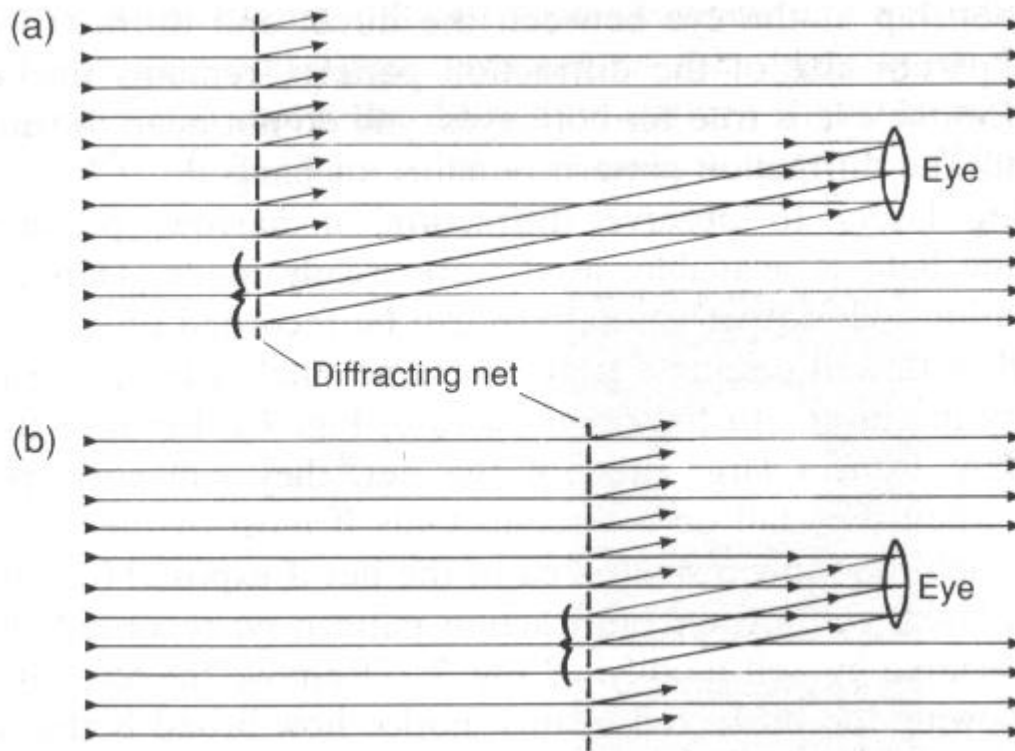
*Luce da sorgente vicina attraverso un forellino: circa puntiforme..*

Osservazioni sperimentali:

1. La luce diffratta attraverso un reticolo materiale genera un reticolo di punti illuminati.
2. La dimensione del pattern di diffrazione è *indipendente* dalla posizione assoluta del reticolo di diffrazione (reticolo reale). Il pattern di diffrazione non cambia spostandoci od avvicinandoci al tessuto. (Ciò dimostra che i raggi diffratti hanno *relazioni angolari fisse* rispetto al raggio diretto od incidente).
3. Un tessuto a grana più fine genera un pattern di diffrazione più spazioso (in modo *inversamente* proporzionale!).
4. Deformazioni di un reticolo diretto comportano deformazioni anche nel reciproco.



**Problema:** Come mai il pattern di diffrazione non cambia se spostiamo il reticolo diffrangente (o se muoviamo la testa nell'osservazione)?



Cosa succede invece per diffrazione attraverso una singola fenditura?

Si osserva che:

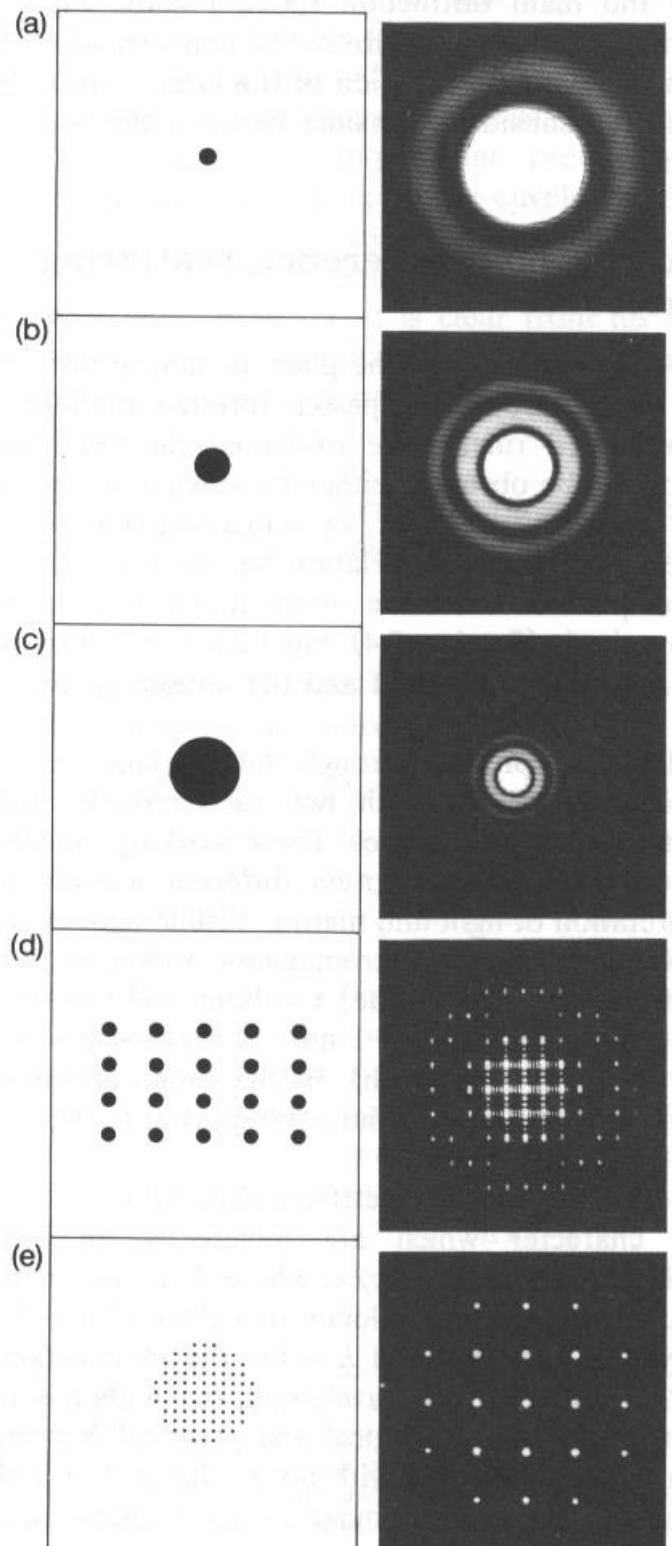
1. attraverso una fenditura molto piccola si propaga luce in modo da generare una grossa zona illuminata.
2. l'illuminazione non è uniforme ma ha una struttura radiale ben definita.
3. attraverso una fenditura più grande si propaga luce con *minor* variazione angolare (immagine più piccola) ma ancora più strutturata radialmente.
4. Ancora, vale la relazione *inversa*:  $d_{\text{fenditura}} = k/d_{\text{immagine}}$

**Problema:** cosa succede se combiniamo fenditure di opportune dimensioni in un reticolo periodico? Quale sarà la trasformata totale?

La **geometria** di diffrazione (*reticolo reciproco*) è determinata dalla disposizione della **geometria** dell'oggetto diffrangente (*reticolo reale*).

L'**intensità** della diffrazione invece ricorda la **dimensione** della fenditura singola.

La presenza di **satelliti** è visibile **solo** quando il numero di fenditure (N) è piccolo (<10 per asse x,y); già in un reticolo 12x12 i satelliti non sono più (facilmente) visibili.



## Cenni sulla natura della luce

1. Luce (in generale, teoria ondulatoria): radiazione elettromagnetica caratterizzata da Ampiezza (Intensità =  $kA^2$ ), frequenza ( $\nu$ ) [o lunghezza d'onda  $\lambda = c/\nu$ ] ed Energia ( $E = hc/\lambda$ )
2. Costanti fisiche:  $c = 2.98 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$ ;  $h = 6.6256 \times 10^{-34} \text{ J s}$ ;
3. Luce visibile: rosso  $\lambda$  ca. 700 nm; violetto  $\lambda$  ca. 400 nm;
4. UV:  $\lambda$  400 nm / 1 nm; raggi X:  $\lambda$  10 nm – 10 pm; raggi  $\gamma$ : 10 nm / 10 fm
5. IR:  $\lambda$  700 nm / 1 mm; microonde:  $\lambda$  1 mm / 500 mm; onde radio:  $\lambda$  500 mm 100 km.

Aspetti quantomeccanici:

Ogni particella massiva dotata di energia cinetica ha un'onda associata di lunghezza  $\lambda = h/mv$ . **Solo** per particelle a massa piccola (o momento  $p = mv$  piccolo) riesco ad evidenziare fenomeni ondulatori: diffrazione di elettroni o di neutroni.

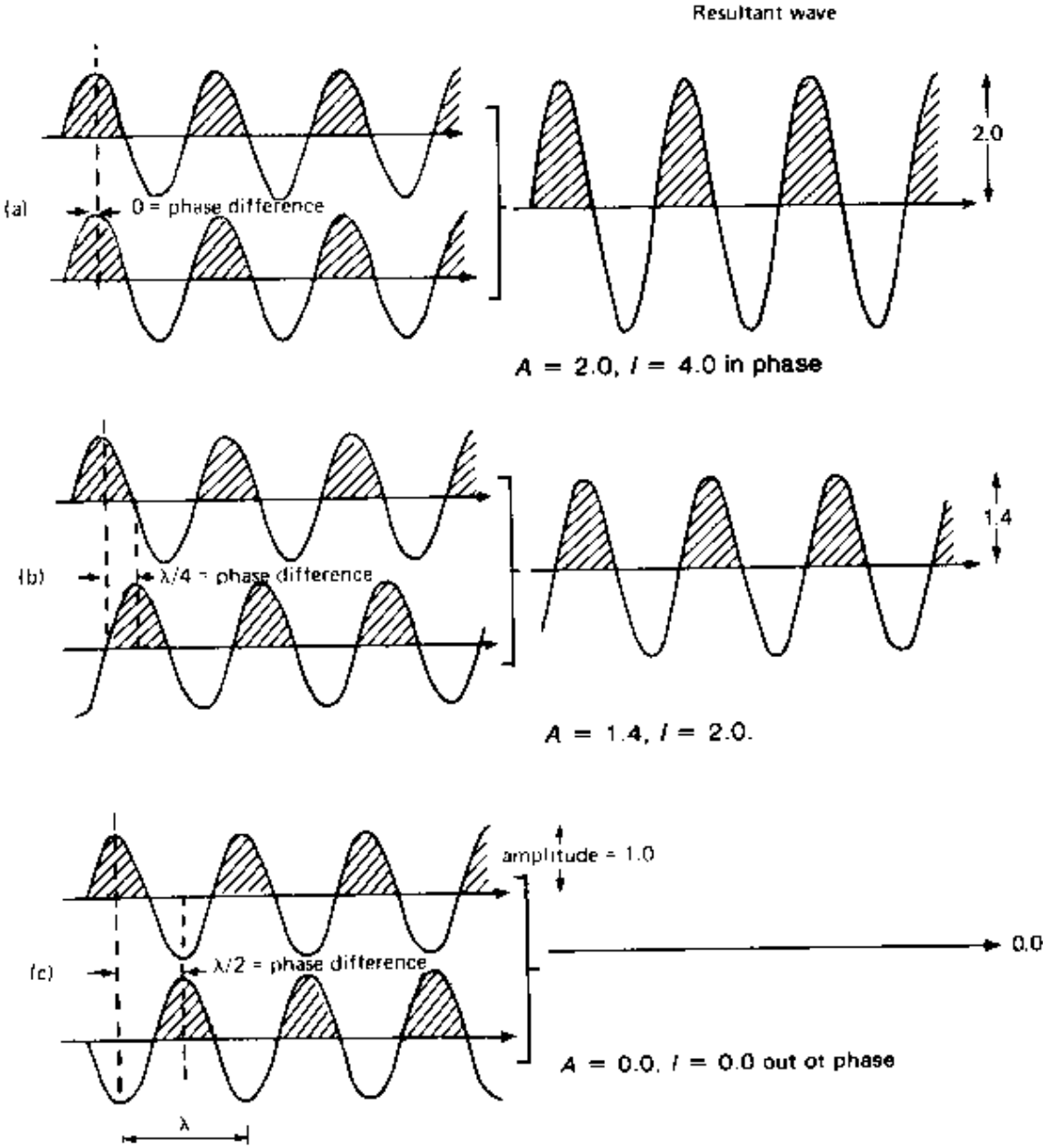
In funzione della fisica che sta alla base del processo di emissione di luce da una sorgente di radiazione, la luce può essere:

1. Continua o pulsata
2. Naturale (non-polarizzata) o polarizzata
3. Coerente od incoerente.

Tipicamente,

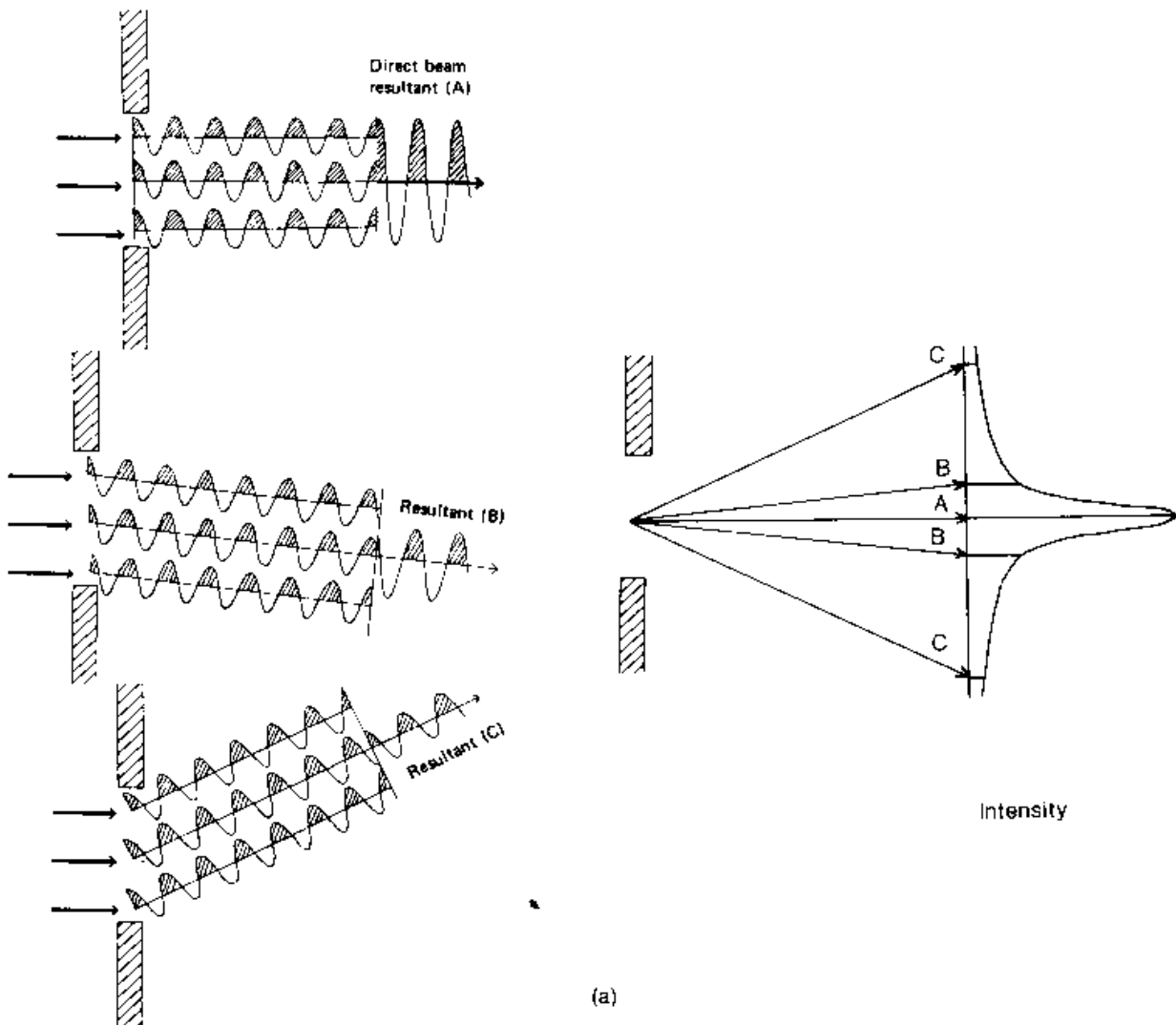
1. Sorgenti laser sono Pulsate, Polarizzate e Coerenti.
2. Sorgenti naturali sono non-polarizzate e, se di elevate dimensioni rispetto a  $\lambda$ ), incoerenti.
3. Sorgenti lontane (puntiformi..), anche se non polarizzate, sono *coerenti* e possono essere trattate col formalismo di Huygens.
4. Per quest'ultime, un treno d'onda (o fotone) arriva **nello stesso identico momento** sulle fenditure, che, a loro volta, si comportano come sorgenti secondarie puntiformi.

Ottica ondulatoria: **Interferenza** di due onde monocromatiche parallele



## Diffrazione da una fenditura di passo $d$ (con $d$ 'alcune' $\lambda$ ):

Interferenza di più onde monocromatiche parallele generate da ondicine di Huygens:



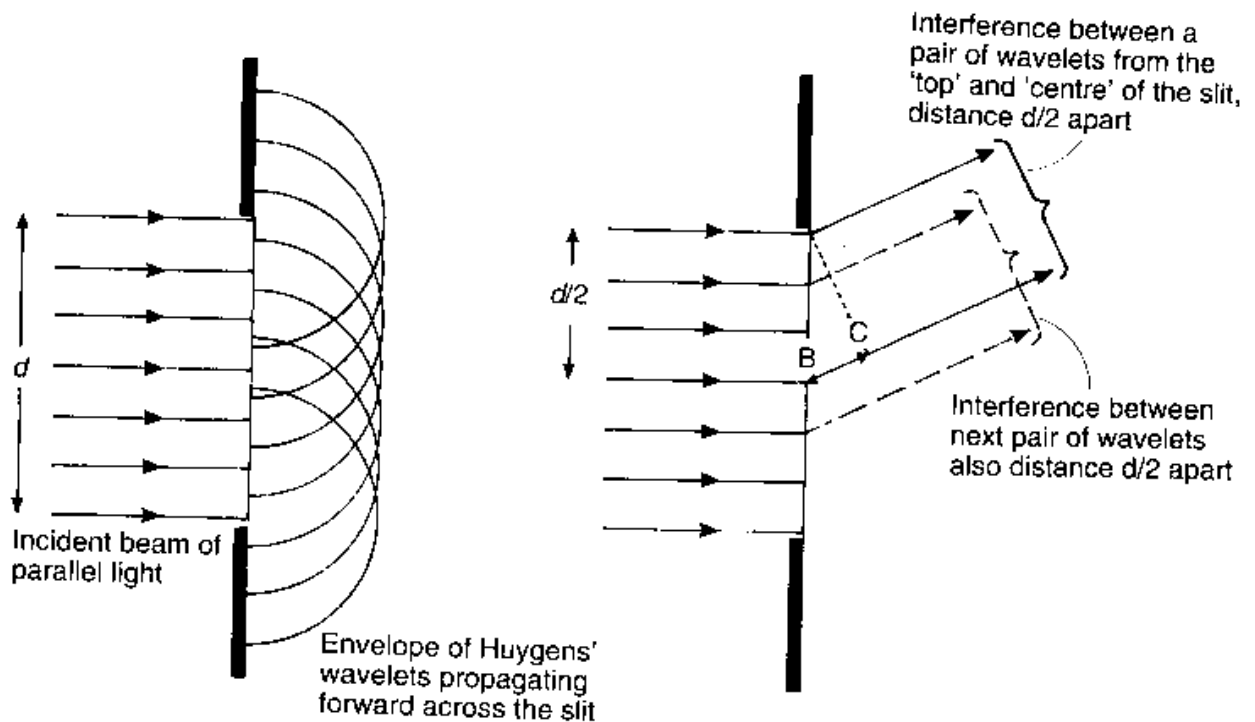
**FIGURE 3.3 Diffraction as the interference of Waves.**

(a) Diffraction from a single slit is illustrated by the superposition of selected waves generated within the area of the slit. The variation in intensity with increasing angle is shown by the different amplitudes of resultant waves at different angles.

La variazione dell'intensità con l'angolo dipende dalle diverse ampiezze delle onde risultanti dall'interferenza.



In dettaglio:



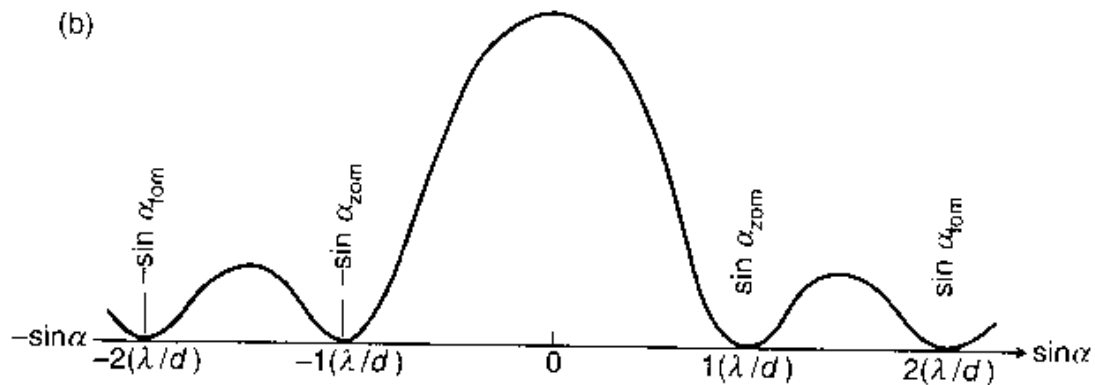
Bisogna sommare (con fase) tutte le ondicine sferiche che si generano in prossimità dell'apertura della fenditura:

- Nella direzione di incidenza, tutte le ondicine sono in fase e danno interferenza costruttiva. Dato che *nessuna* ondicina è fuori fase, in questa direzione si avrà il *massimo assoluto* dell'intensità diffratta.
- Più ci allontaniamo (angolarmente) dalla direzione del raggio incidente, più alte sono le chances di trovare ondicine che sono sempre meno in fase e si cancellano. Ma ciò avviene in modo continuo e monotono?

Prendiamo due ondicine separate di  $d/2$ : una in cima alla fenditura, l'altra nel centro: quando la differenza di cammino ottico (BC) è  $\lambda/2$ , si ha interferenza distruttiva:

$$BC = \lambda/2 = d/2 \sin \alpha_{zom} \quad \text{o} \quad \lambda = d \sin \alpha_{zom}$$

- $zom = \text{Zero Order Minimum}$
- Per ogni altra coppia adiacente, vale la stessa relazione; quindi, per *tutta* la fenditura,  $\lambda = d \sin \alpha_{zom}$  è la condizione per cui l'intensità, massima per  $\alpha = 0$ , cade improvvisamente a ZERO.
- Al crescere dell'angolo di osservazione a  $\alpha > \alpha_{zom}$ , si può osservare un massimo secondario (di intensità molto inferiore) dovuto a *parziale* interferenza costruttiva, che gradualmente sparisce in prossimità di  $\alpha_{fom}$  ove:  $\lambda/2 = d/4 \sin \alpha_{fom}$  o  $2\lambda = d \sin \alpha_{fom}$
- $fom = \text{First Order Minimum}$
- Analogamente, si può derivare che per  $\sin \alpha_{fom} = n\lambda/d$ , si ha intensità nulla.

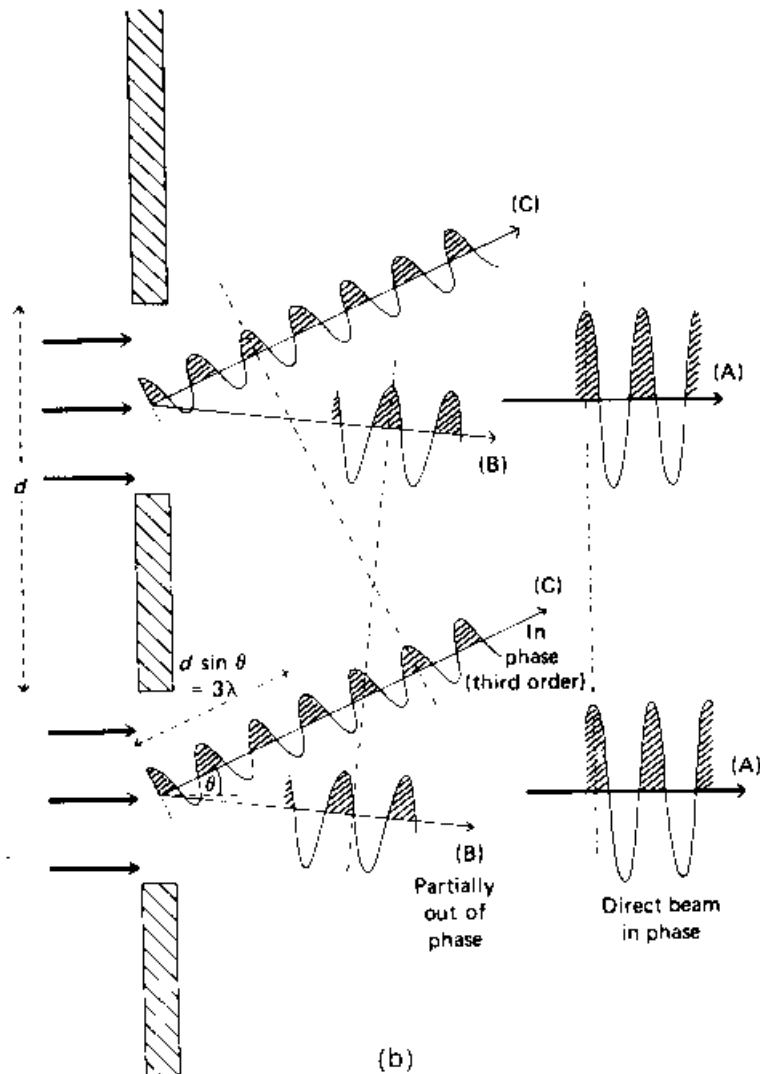


Per una **fenditura circolare**, si ha un alone di massimo, circondato da aloni secondari e circonferenze a intensità nulla. In questo caso:

$$1.22\lambda = d \sin \alpha_{zom}$$

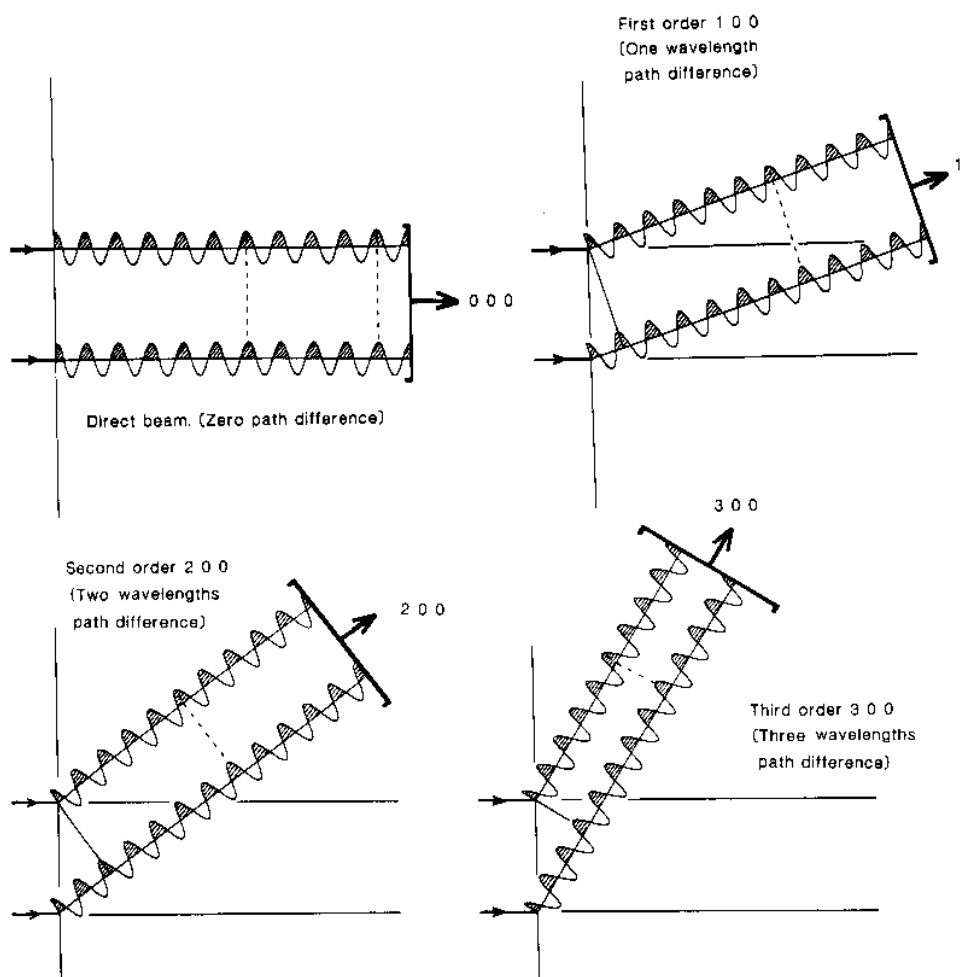
## Diffrazione da due fenditure:

Superimposizione (interferenza) di pattern di diffrazione generati per interferenza in ogni singola fenditura quelli dell'altra.



E' possibile osservare diversi ordini di interferenza, legati a differenze di cammino ottico di  $n\lambda$ .

Quando ogni singola fenditura è assimilabile a una singola sorgente puntiforme, si ha interferenza costruttiva per AB uguale an un numero intero di lunghezze d'onda:



$n\lambda = a \sin \alpha_n$ , ove  $a$  è la separazione fra le fenditure  
(nei cristalli reali,  $a$  è assimilabile ad un parametro di cella!)

- Minore è la spaziatura  $a$  (reale), maggiori sono gli angoli a cui si ha diffrazione (interferenza costruttiva).
- Maggiore è la lunghezza d'onda  $\lambda$ , maggiori sono gli angoli a cui si ha diffrazione (interferenza costruttiva).

In pratica, minore è il rapporto  $a/\lambda$ , maggiori sono gli angoli a cui osservo intensità diffratta nonnulla.

- Per luce visibile su tessuti o elettroni su cristalli,  $a/\lambda$  è alto ( $>100$ ) e gli angoli di diffrazione sono piccoli.

In questo caso,  $\sin \alpha_n \approx \alpha_n$ , e

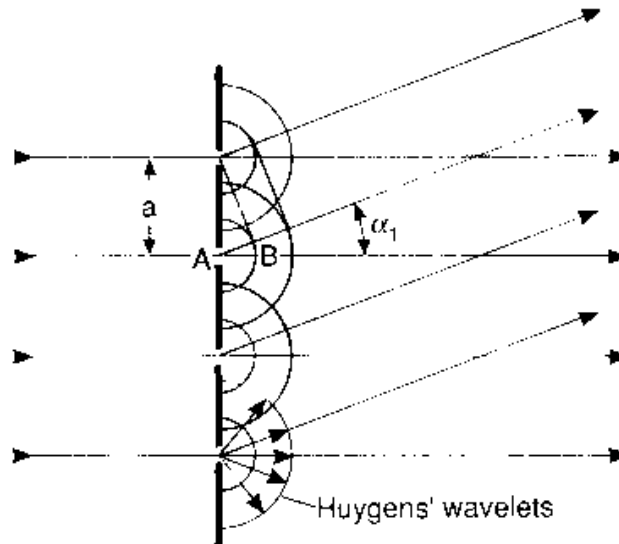
$$a_n = n\lambda / a$$

- Per raggi X su cristalli,  $a$  è simile a  $\lambda$  ( $a/\lambda$  ca. 5-20) e gli angoli di diffrazione sono alti.

$$n\lambda = a \sin \alpha_n \quad \text{ovvero} \quad \sin \alpha_n = n\lambda / a$$

## Diffrazione da reticoli regolari infiniti (fenditure parallele equidistanti di larghezza $d$ e spaziatura $a$ ).

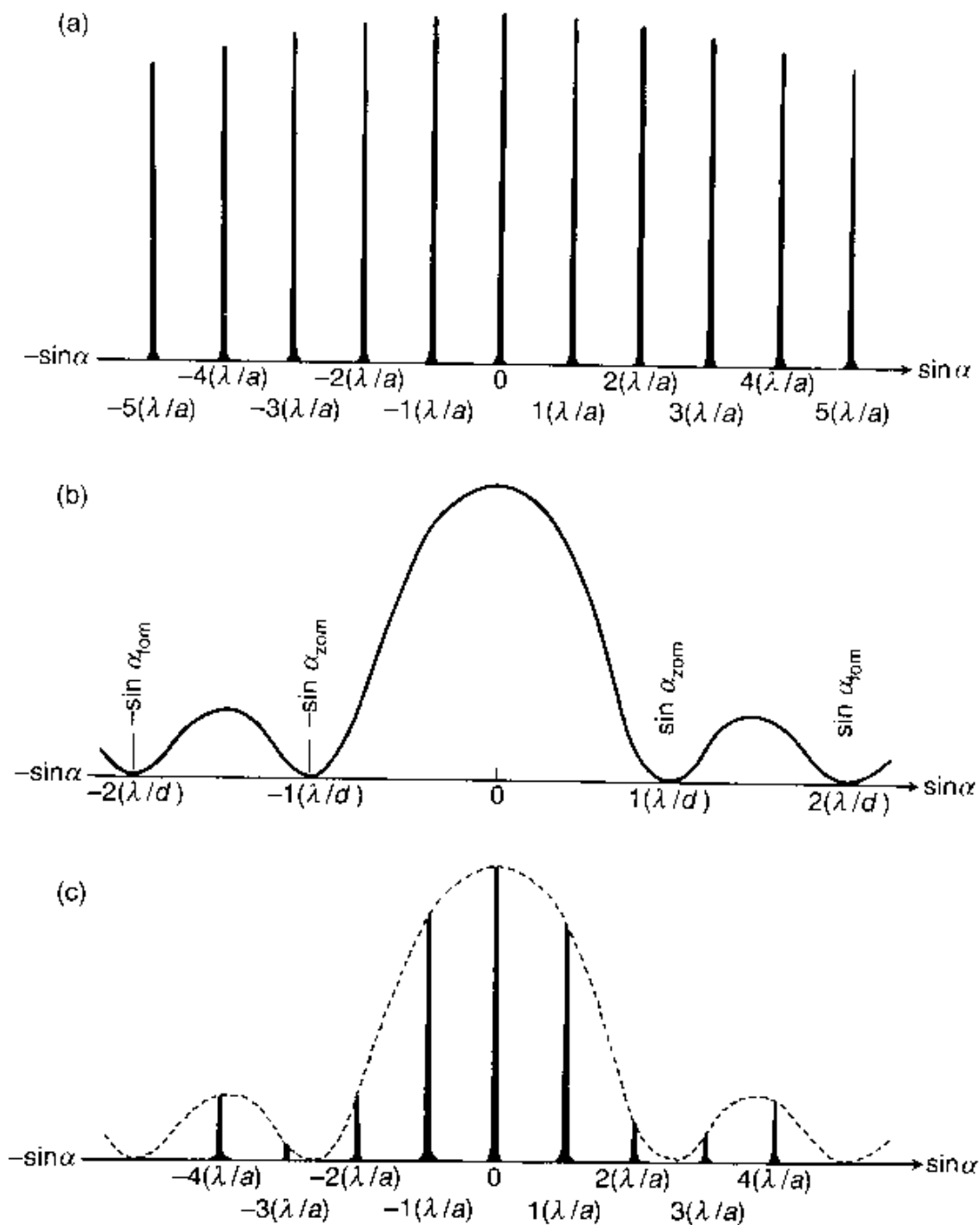
Somma e differenza (con fasi) di diverse onde



**Fig. 7.5.** A set of lines in the net acts as a diffraction grating, each slit acting as the source of a single set of Huygens' wavelets. The diffracted beam is drawn for a path difference of one wavelength.

Le onde uscenti sono in grado di dare interferenza costruttiva (picco con picco) o distruttiva (picco con valle). La **geometria** del reticolo (nota  $\lambda$ ) determina *in modo univoco* dove e come si incontrino picchi con picchi e picchi con valli. Ciò vale per qualsiasi treno d'onda incidente, per cui il pattern di diffrazione (chiari e scuri su uno schermo rivelatore) è determinato dalla natura dell'oggetto diffrangente.

Se le fenditure sono illuminate da onde con incidenza diversa (luce incoerente), la diffrazione scompare dato che gruppi di onde diverse (magari anche a stessa  $\lambda$ ) non portano con sé relazioni geometriche precise che determinano interferenza localizzata, ma solo interazioni spaziali casuali.



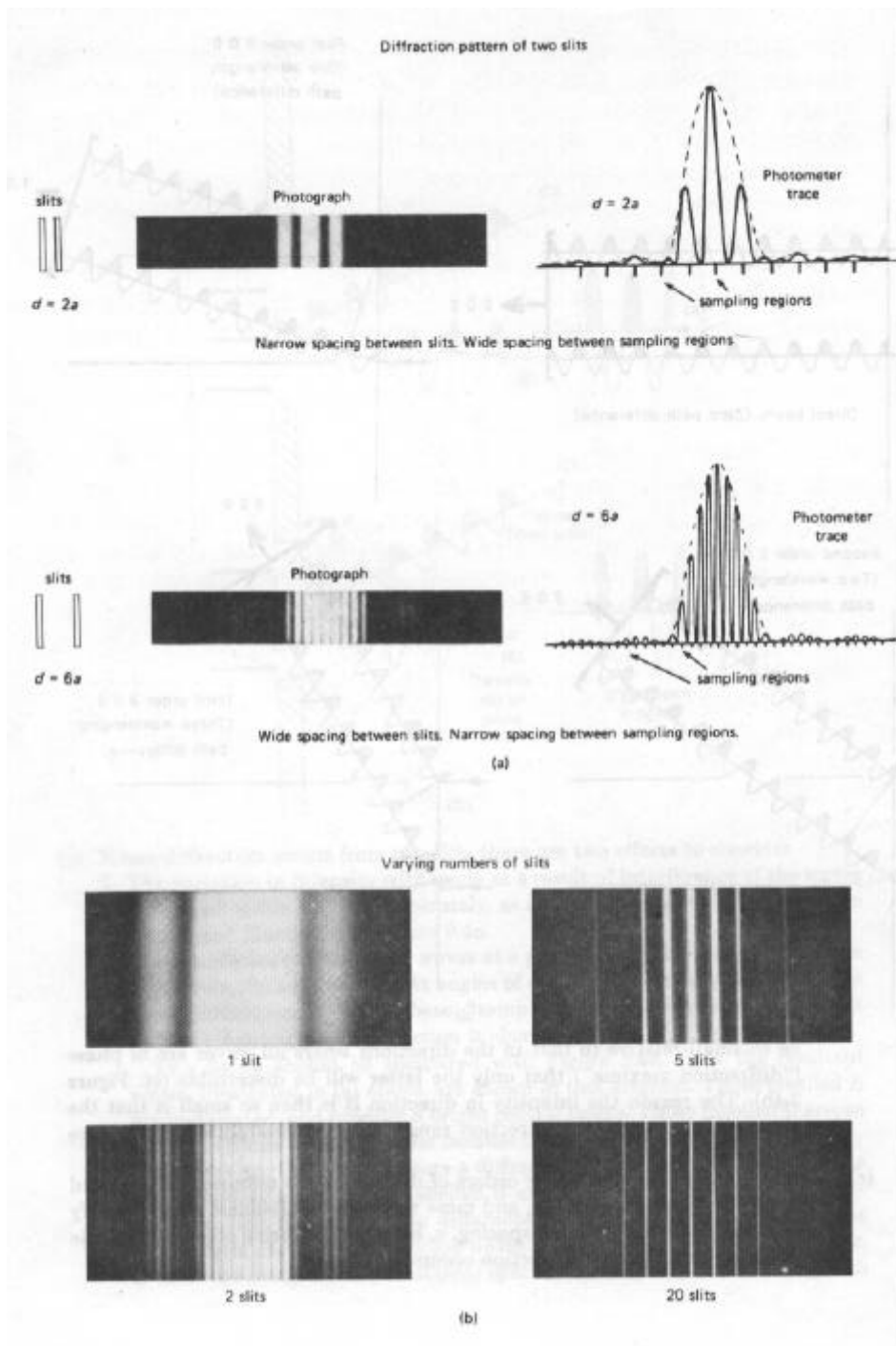
Se le fenditure sono strettissime ( $d \gg a$ )

si hanno massimi stretti in  $\sin \alpha_n = n\lambda/a$

Se le fenditure sono 'abbastanza' larghe ( $d \approx a$ ), si ha modulazione tramite la 'trasformata della fenditura', ovvero:

*Trasformata del reticolo di fenditure*

*= Trasformata del reticolo \* Trasformata delle fenditure*

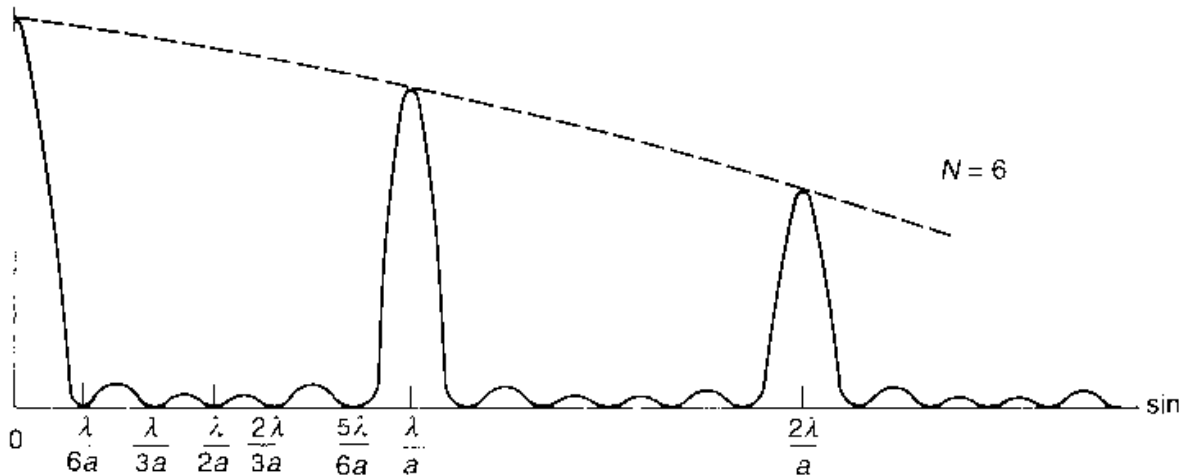


La traccia effettiva consiste di una serie di picchi e valli strutturata, che stanno all'interno di un involuppo generale:

1. L'involuppo è determinato dalla forma e dimensioni ( $d$ ) di una singola fenditura.
2. La posizione dei picchi di diffrazione è determinata dalla spaziatura tra le fenditure ( $a$ ). Più lontane sono le fenditure, più vicini sono i massimi.
3. Maggiore è il numero di fenditure, più stretti sono i picchi e più netta è la distinzione fra picco e fondo (sharpness).

## Diffrazione da Reticolo finito:

Problema: Cosa succede se il numero di fenditure è limitato ( $N < 10$ )?  
 Se  $W$  è la larghezza totale, e la spaziatura è  $a$ ,  $W = Na$



**Fig. 7.9.** Diagram of the diffraction pattern from a grating (drawn on one side of the direct beam) consisting of  $N$  narrow slits of spacing  $a$ . Between the principal maxima there are  $(N - 2)$  subsidiary maxima or fringes. The diagram is drawn for  $N = 6$  (modified from *Optics* by E. Hecht and A. Zajac, Addison-Wesley, 1980).

Si deriva che:

- I minimi ad intensità nulla sono per  $\sin \alpha_n = n\lambda/W$  o:  $\sin \alpha_n = n/N \lambda/a$
- I massimi non sono più stretti, ma sono allargati e circondati da massimi sussidiari o 'frange'.
- Il numero di frange cresce con  $N$  e la loro intensità diminuisce con  $N$ : ciò comporta che per  $N$  sufficientemente alto, sono invisibili.
- La larghezza dei massimi è  $1/N$  della separazione angolare dei massimi principali. Tende quindi a diminuire al crescere di  $N$ .
- Ci sono  $N-2$  massimi sussidiari tra due ordini di massimi principali successivi.



## Relazione fra pattern di diffrazione mono-dimensionali e reticolo bi (e tri-) dimensionale:

1. Un reticolo di diffrazione monodimensionale di passo  $a$  genera una trasformata (distribuzione dell'intensità diffratta) caratterizzata da righe parallele equispaziate di  $a^*$ . Vale la relazione  $a = K/a^*$
2. Lo stesso vale per una altra direzione  $b$ : un reticolo di diffrazione monodimensionale di passo  $b$  genera una trasformata (distribuzione dell'intensità diffratta) caratterizzata da righe parallele equispaziate di  $b^*$ . Vale la relazione  $b = K/b^*$
3. Un reticolo **bidimensionale**, caratterizzato da  $a$  e  $b$ , genera un reticolo bidimensionale definito da  $a^*$  e  $b^*$ . I punti di massima diffrazione coincidono con le *intersezioni* delle righe (in realtà *piani*) in  $a^*$  e  $b^*$ . La *trasformata del reticolo reale* è il reticolo **reciproco**.

