

Ricostruzione di immagini sfuocate con condizioni al contorno “Anti-Riflettenti”

MARCO DONATELLI

(marco.donatelli@uninsubria.it)

Università dell’Insubria, Dip. CCFFMM - Sede di Como
Via Valleggio 11 - 22100 Como, Italy

Schema presentazione

- Problema modello 1D (ricostruzione di un segnale).
- Vari tipi di Condizioni al Contorno (CC).
- CC Anti-Riflettenti ed algoritmo per risolvere il sistema lineare.
- Esperimenti numerici: confronti fra le varie CC.
- Conclusioni.

Problema 1D (ricostruzione di un segnale)

- Ricostruire il segnale $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)^T$ il più simile possibile all'originale a partire dal segnale osservato $\mathbf{g} = (g_1, \dots, g_n)^T$ distorto.
- Dato l'operatore di convoluzione $\mathbf{h} = (h_m, \dots, h_0, \dots, h_{-m})^T$ (invariante per traslazione) g ed f sono legati da:

$$g_i = \sum_{j=-m}^m h_j f_{i-j}, \quad i = 1, \dots, n.$$

- In forma matriciale:

$$\begin{pmatrix} h_m & \cdots & h_0 & \cdots & h_{-m} \\ & \cdots & & \cdots & \\ & & h_m & \cdots & h_0 & \cdots & h_{-m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{f}_s \\ \mathbf{f} \\ \mathbf{f}_d \end{pmatrix} = \mathbf{g}$$

dove $\mathbf{f}_s = (f_{-m+1}, \dots, f_0)^T$ e $\mathbf{f}_d = (f_{n+1}, \dots, f_{n+m})^T$.

Condizioni al Contorno (CC)

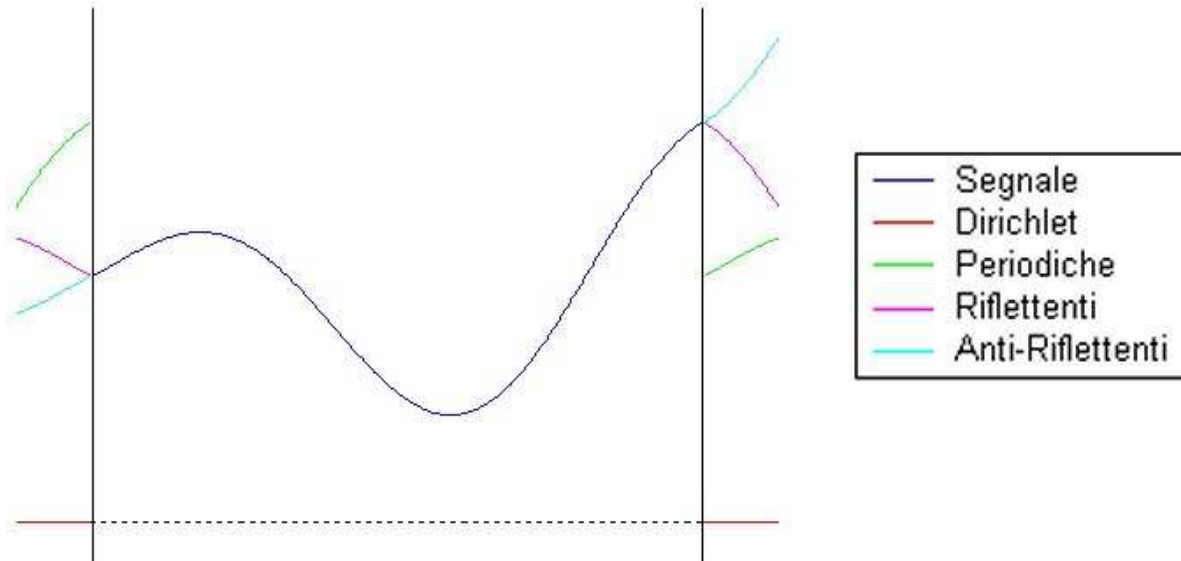
- Il sistema lineare è sottodeterminato.
- Una possibile soluzione è **imporre Condizioni al Contorno**: \mathbf{f}_s e \mathbf{f}_d vengono definite come trasformazioni affini su \mathbf{f} .
- Il **sistema da risolvere** diventa quadrato e non singolare

$$H\mathbf{f} = \mathbf{g}.$$

- Requisiti per avere delle buone CC:
 - **Buona approssimazione**: il modello deve rappresentare bene la realtà, i.e. minimo errore possibile nella ricostruzione.
 - **Basso costo computazionale**: ottenere una matrice H t.c. il sistema lineare possa essere risolto velocemente.

Vari tipi di CC

Tipo di CC	Descrizione	Matrice H
Dirichlet	$\mathbf{f}_s = \mathbf{f}_d = \mathbf{0}$	Toeplitz
Circolanti	$\mathbf{f}_s = (f_{n-m+1}, \dots, f_n)^T$ $\mathbf{f}_d = (f_1, \dots, f_m)^T$	Circolante (FFT)
Riflettenti	$\mathbf{f}_s = (f_m, \dots, f_1)^T$ $\mathbf{f}_d = (f_n, \dots, f_{n-m+1})^T$	Coseni (DCT III) Toeplitz + Hankel
Anti-Riflettenti	$\mathbf{f}_s - \mathbf{f}_1 \mathbf{e} = \mathbf{f}_1 \mathbf{e} - (f_m, \dots, f_1)^T$ $\mathbf{f}_d - \mathbf{f}_1 \mathbf{e} = \mathbf{f}_1 \mathbf{e} - (f_n, \dots, f_{n-m+1})^T$	Seni (DST III) + rango 2 Toeplitz - Hankel



Soddisfacibilità dei requisiti CC

- Sia n la dimensione del sistema lineare:

Tipo di CC	Approssimazione	Costo computazionale
Dirichlet	discontinuità	$O(n^2)$ in 1D e $O(n^{2.5})$ in 2D
Circolanti	discontinuità	$O(n \log(n))$ op. complesse
Riflettenti	C^0 ma discontinuità $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \vec{n}}$	$O(n \log(n))$ op. reali
Anti-Riflettenti	C^0 e continuità $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \vec{n}}$	$O(n \log(n))$ op. reali

- Nel caso 1D con CC Anti-Riflettenti si ha:

$$H = \begin{bmatrix} * & & & & & & \\ & \vdots & & & & & \\ & & * & & & & \\ & & & \boxed{S} & & & \\ & & & & * & & \\ & & & & & \vdots & \\ & & & & & & * \end{bmatrix}$$

con S in DST-I.

CC Anti-Rifletenti 2D

- Come scegliere le condizioni agli angoli?

?	Ok	?
Ok	FIG	Ok
?	Ok	?

- Soluzioni:

(A) antiriflettere rispetto all'angolo \implies rango della correzione elevato,

(B) antiriflettere prima rispetto ad una direzione e poi rispetto all'altra \implies matrice dei coefficienti *struttura tensore della matrice Anti-Riflettente 1D*.

- **Algoritmo** per la scelta (B) per immagini con n pixel:

- risolvere i 4 vertici (costo $O(1)$),
- risolvere i 4 lati con l'algoritmo Anti-Riflettente 1D (costo $O(\sqrt{n} \log \sqrt{n})$),
- la matrice relativa alla parte interna dell'immagine è una DST-I bidimensionale (costo $O(n \log n)$).

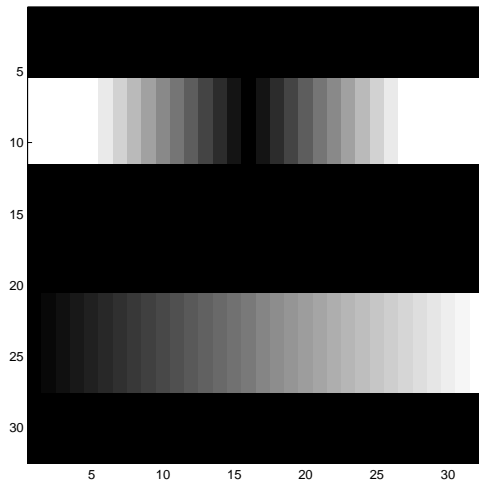
Un esempio “artificiale”

- Funzione di sfuocamento:

$$\text{PSF}(x, y) = \frac{1}{16}(2 + \cos(x) + \cos(2x))(2 + \cos(y) + \cos(2y))$$

-

Immagine originale



Visualizzazione 3D

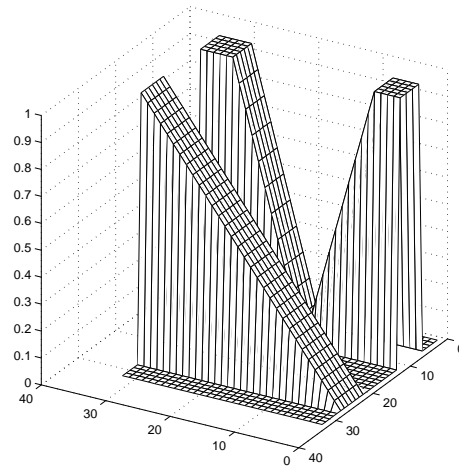
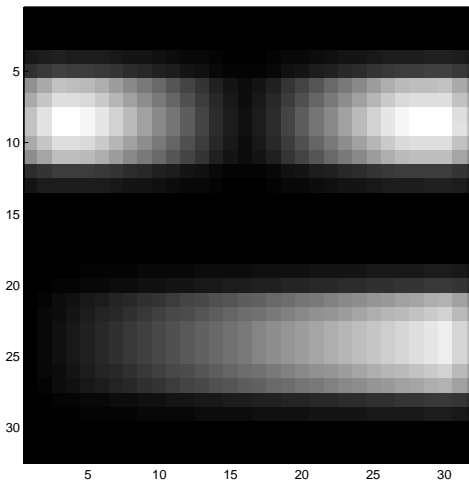
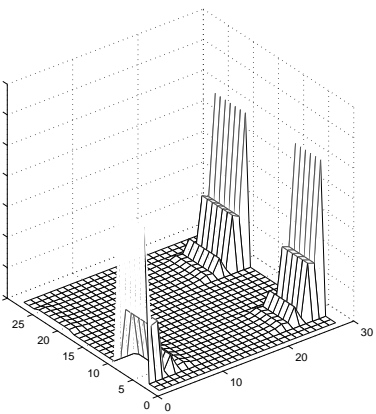
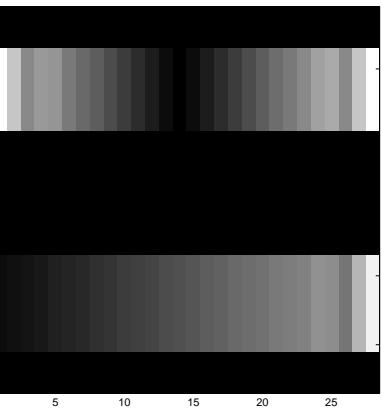


Immagine sfuocata

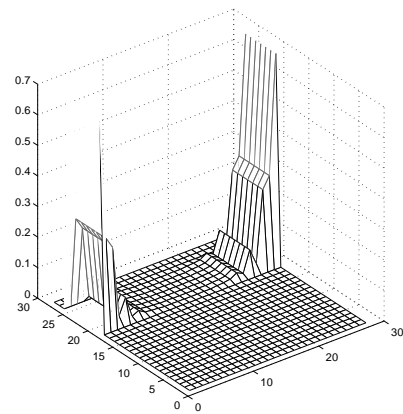
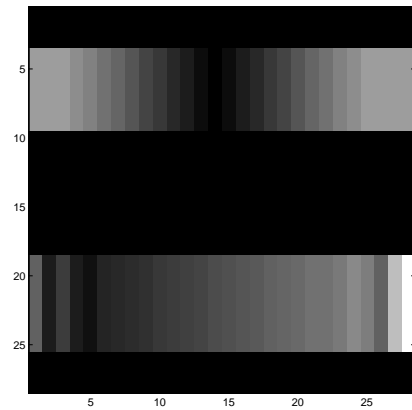


Ricostruzione ed errore con le varie CC

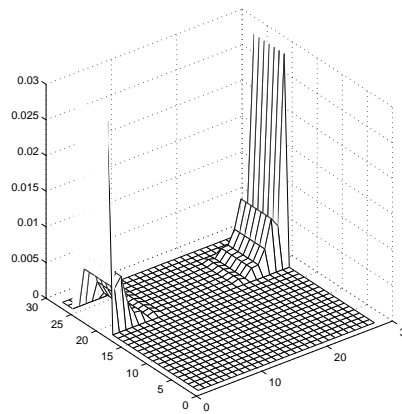
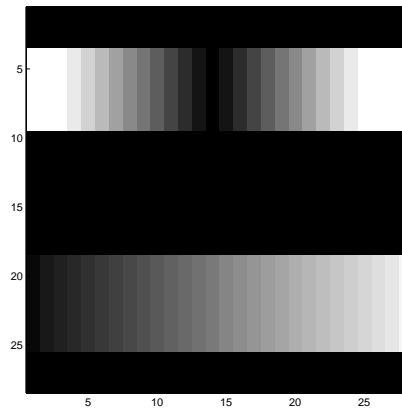
Dirichlet



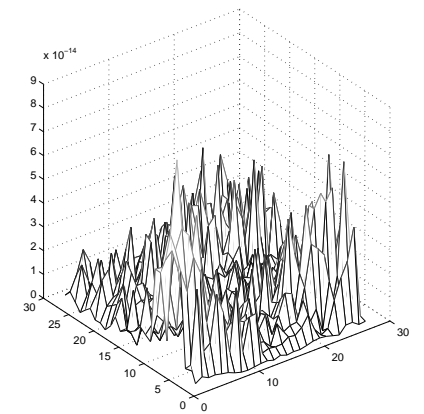
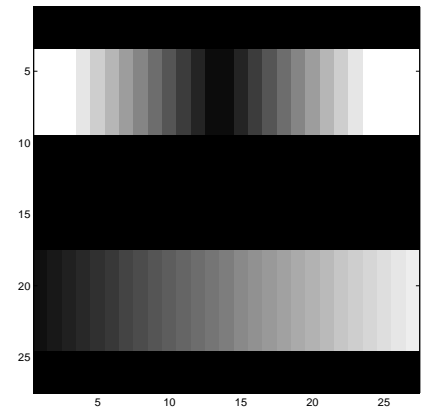
Periodiche



Riflettenti

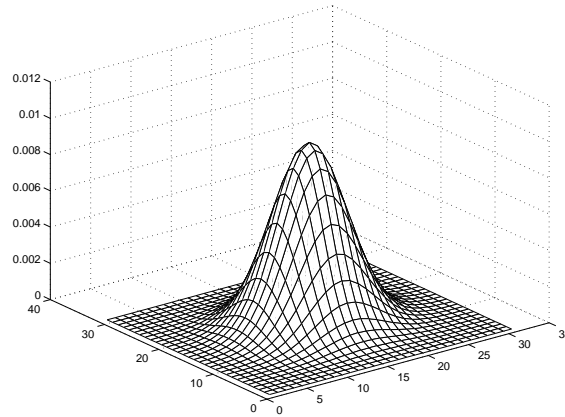


Anti-Riflettenti (**B**)



Un esempio “realistico”

- Funzione di sfuocamento Gaussiana 31×31



PSF

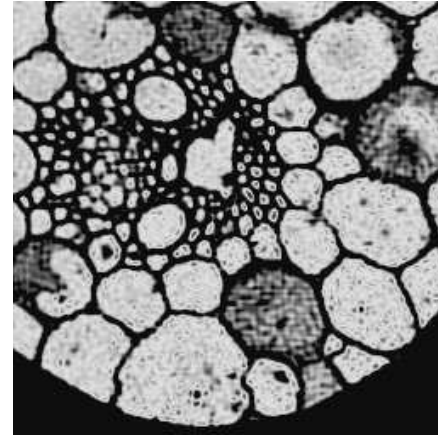
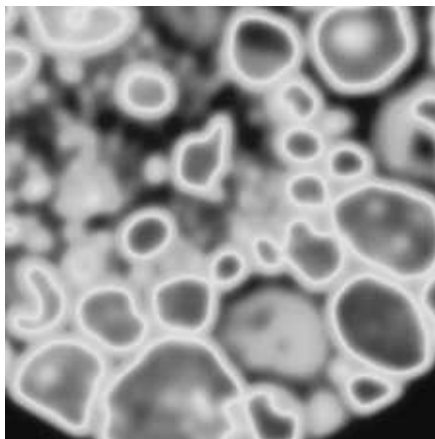
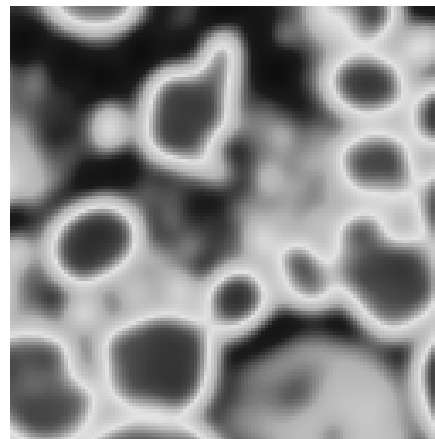


Immagine vera

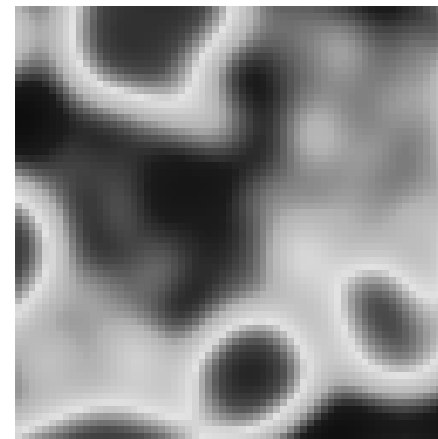
- Immagini sfuocate



225×225



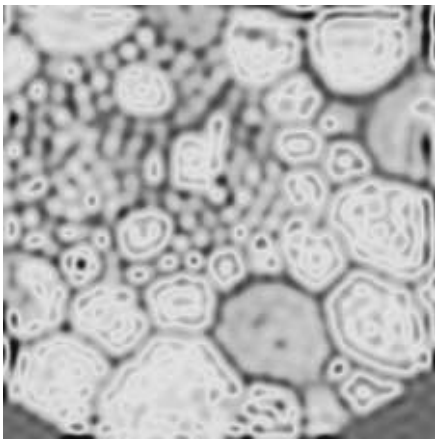
128×128



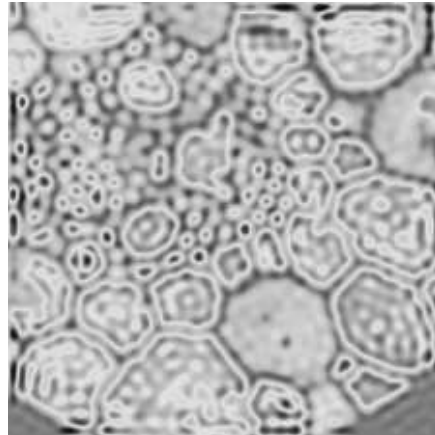
64×64

Ricostruzione con GC

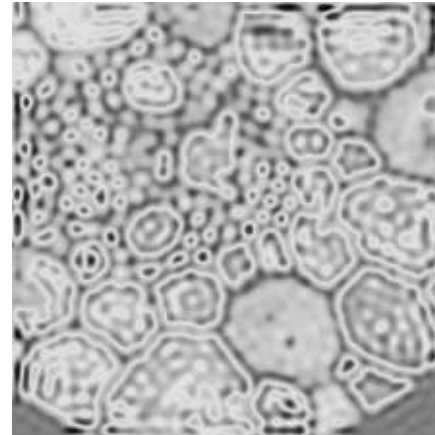
- Il sistema lineare è risolto con il **Gradiente Coniugato (GC)**.
- **Criterio di arresto** $\frac{\|f - f^{(k)}\|}{\|f\|}$ dove f è l'immagine vera e $f^{(k)}$ quella ricostruita al passo k .
- **Immagine ricostruite** 225×225 :



Riflettenti



Anti-Riflettenti (**A**)

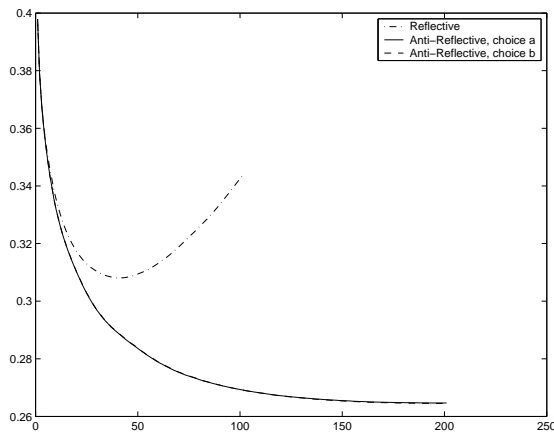


Anti-Riflettenti (**B**)

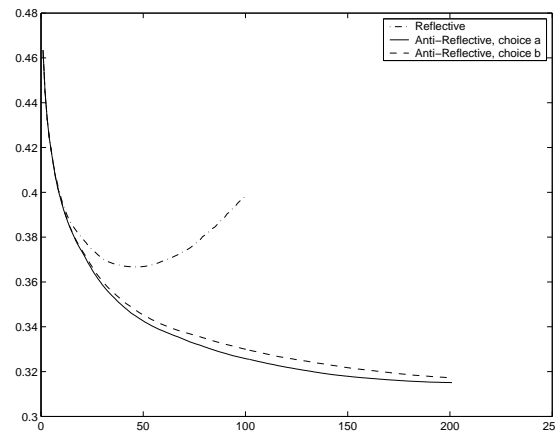
Errore di ricostruzione con GC

- Errore relativo per le 3 sottoimmagini:

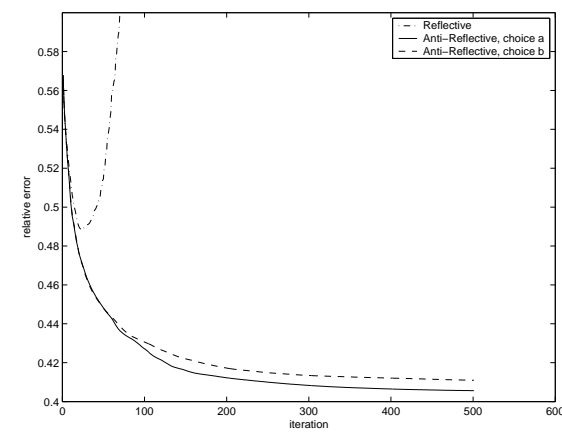
Dimensione	Dirichlet	Periodiche	Riflettenti	Anti-Riflettenti (A)	Anti-Riflettenti (B)
225×225	0.3817	0.3643	0.3081	0.2646	0.2645
128×128	0.4578	0.4208	0.3667	0.3151	0.3172
64×64	0.5678	0.5308	0.4882	0.4056	0.4109



225×225



128×128



64×64

- Le due scelte (A) e (B) per le Anti-Riflettenti hanno un comportamento simile.
- Con le Anti-Riflettenti l'errore ha un andamento parabolico con una crescita dopo il minimo molto piu' lenta rispetto alle altre CC semplificandone la stima.

Conclusioni

- Migliore ricostruzione rispetto alle CC “classiche”.
- Costo computazionale $O(n \log n)$ operazioni reali per immagini con n pixel.
- Andamento dell'errore relativo stabile nella ricostruzione con GC.
- **Bibliografia:**
 - S. SERRA CAPIZZANO, *A note on anti-reflective boundary conditions and fast deblurring models*, SIAM J. Sci. Comput., to appear.
 - M. DONATELLI, C. ESTATICO, J. NAGY, L. PERRONE AND S. SERRA-CAPIZZANO, *Anti-reflective boundary conditions and fast 2D deblurring models*, Proceeding to SPIE's 48th Annual Meeting, August 2003, San Diego, CA USA.