

L'algebra Antiriflettente con applicazioni alla ricostruzione di immagini

M. DONATELLI e *S. Serra Capizzano*

Collaboratori:

A. Aricò, C. Estatico, A. Martinelli, and J. Nagy

<http://scienze-como.uninsubria.it/mdonatelli/>



- 1 Ricostruzione di immagini sfuocate
 - Condizioni al contorno 1D: segnali
 - Condizioni al contorno 2D: immagini
- 2 L'algebra Antiriflettente
 - Definizione dell'algebra Antiriflettente
 - Regolarizzazione mediante re-blurring
- 3 Risultati numerici
- 4 Conclusioni



Outline

- 1 Ricostruzione di immagini sfuocate
 - Condizioni al contorno 1D: segnali
 - Condizioni al contorno 2D: immagini
- 2 L'algebra Antiriflettente
 - Definizione dell'algebra Antiriflettente
 - Regolarizzazione mediante re-blurring
- 3 Risultati numerici
- 4 Conclusioni



Il problema modello

L'immagine ricostruita \mathbf{f} è ottenuta "risolvendo":

$$A\mathbf{f} = \mathbf{g}$$

- $\mathbf{g} = \text{vec}(G)$ dove G è
immagine osservata = immagine sfuocata + rumore
- A = matrice bilivello associata alla point spread function (PSF).
- La **PSF** è l'osservazione di un singolo punto (e.g., una stella in astronomia) ed è assunta spazio invariante.



Obiettivi della ricostruzione

Requisiti

- Buona qualità dell'immagine ricostruita
- Possibilità di ricondurre il calcolo a trasformate veloci stile FFT



Obiettivi della ricostruzione

Requisiti

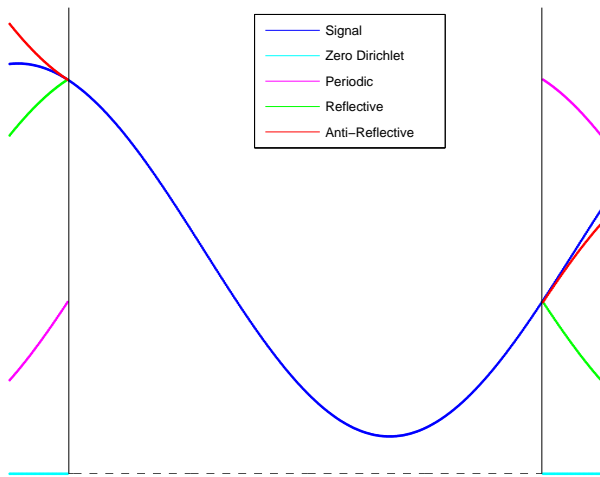
- Buona qualità dell'immagine ricostruita
- Possibilità di ricondurre il calcolo a trasformate veloci stile FFT

Come soddisfare i requisiti

- ① **Modellisticamente** nella formalizzazione del problema
- ② **Computazionalmente** nella definizione di metodi regolarizzanti



Condizioni al contorno 1D: segnali



Struttura della matrice dei coefficienti 1D

Condizioni al contorno (CC)	Struttura della matrice A
Zero Dirichlet Periodiche	Toeplitz: costante lungo le diagonali Circolante: $A = FDF^H$ con F matrice di Fourier e D diagonale
Riflettenti	Toeplitz + Hankel e se la PSF è simmetrica $A = CDC^T$ con C trasformata di coseni (DCT-III)

Struttura della matrice dei coefficienti 1D

Condizioni al contorno (CC)	Struttura della matrice A
Zero Dirichlet	Toeplitz: costante lungo le diagonali
Periodiche	Circolante: $A = FDF^H$ con F matrice di Fourier e D diagonale
Riflettenti	Toeplitz + Hankel e se la PSF è simmetrica $A = CDC^T$ con C trasformata di coseni (DCT-III)

Costo computazionale

- Il prodotto matrice vettore costa $O(n \log(n))$ ops sempre,
- L'inversione costa $O(n \log(n))$ ops solo per CC periodiche e CC riflettenti con PSF simmetrica.



Condizioni al contorno antiriflettenti 1D

- Si opera un'antiriflessione rispetto ai punti del bordo f_1 e f_n

$$f_{1-j} = 2f_1 - f_{j+1}$$

$$f_{n+j} = 2f_n - f_{n-j}$$

per $j = 1, 2, \dots$



Condizioni al contorno antiriflettenti 1D

- Si opera un'antiriflessione rispetto ai punti del bordo f_1 e f_n

$$f_{1-j} = 2f_1 - f_{j+1}$$

$$f_{n+j} = 2f_n - f_{n-j}$$

per $j = 1, 2, \dots$

Osservazione

Le CC riflettenti garantiscono la continuità al bordo mentre le CC antiriflettenti garantiscono la continuità anche della derivata normale.

[S. SERRA CAPIZZANO, SISC 2004]



Proprietà strutturali di A

PSF generica

- $A = \text{Toeplitz} + \text{Hankel} + \text{rango } 2$.
- Prodotto matrice-vettore in $O(n \log(n))$ ops.



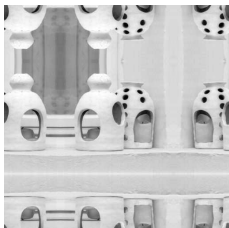
Condizioni al contorno 2D: immagini



zero Dirichlet



Periodiche



Riflettenti



Antiriflettenti

Struttura della matrice dei coefficienti 2D

- Si opera lo stesso tipo di estensione dell'immagine prima lungo una direzione e poi lungo l'altra



la matrice A ha una struttura a due livelli, dove ogni livello ha la stessa struttura del caso 1D.

- **Esempio:** zero Dirichlet $\mapsto A$ è Toeplitz a blocchi con blocchi Toeplitz.
- La generalizzazione al **caso 3D** segue in modo naturale applicando la stessa estensione anche lungo la terza dimensione ottenendo A con una struttura a 3 livelli.



Outline

- 1 Ricostruzione di immagini sfuocate
 - Condizioni al contorno 1D: segnali
 - Condizioni al contorno 2D: immagini
- 2 L'algebra Antiriflettente
 - Definizione dell'algebra Antiriflettente
 - Regolarizzazione mediante re-blurring
- 3 Risultati numerici
- 4 Conclusioni



L'algebra \mathcal{AR}

L'algebra \mathcal{AR} è composta dalle matrici della forma

$$AR_n(h) = \begin{bmatrix} h(0) & & \\ \mathbf{v}_{n-2}(h) & \tau_{n-2}(h) & J\mathbf{v}_{n-2}(h) \\ & & h(0) \end{bmatrix},$$

dove

- h è un polinomio di coseni a coefficienti reali di grado al più $n - 3$
- J è la matrice di flip,
- $\tau_{n-2}(h) = Q \text{diag}_{j=1, \dots, n-2} (h(\frac{j\pi}{n-1})) Q$, dove Q è la DST-I,
- $\mathbf{v}_{n-2}(h) = \tau_{n-2}(\phi(h)) \mathbf{e}_1$ with $[\phi(h)](x) = \frac{h(x) - h(0)}{2 \cos(x) - 2}$.

[A. Aricò, M. D., S. Serra Capizzano, LAA, 2007]



Proprietà dell'algebra \mathcal{AR}

- Imponendo CC antiriflettenti con una PSF simmetrica generata da h si ottiene $A = AR_n(h)$.



Proprietà dell'algebra \mathcal{AR}

- Imponendo CC antiriflettenti con una PSF simmetrica generata da h si ottiene $A = AR_n(h)$.

Proprietà computazionali:

- $\alpha AR_n(h_1) + \beta AR_n(h_2) = AR_n(\alpha h_1 + \beta h_2)$,
- $AR_n(h_1)AR_n(h_2) = AR_n(h_1 h_2)$.



Proprietà dell'algebra \mathcal{AR}

- Imponendo CC antiriflettenti con una PSF simmetrica generata da h si ottiene $A = AR_n(h)$.

Proprietà computazionali:

- $\alpha AR_n(h_1) + \beta AR_n(h_2) = AR_n(\alpha h_1 + \beta h_2)$,
- $AR_n(h_1)AR_n(h_2) = AR_n(h_1 h_2)$.

Risultati negativi per \mathcal{AR} :

- non è chiusa per trasposizione,
- se $A \in \mathcal{AR}$, allora A non è normale.



Forma canonica di Jordan di $AR_n(\cdot)$

Teorema

Sia h un polinomio di coseni di grado al più $n-3$, allora

$$AR_n(h) = T_n \text{diag}_{y \in G} (h(y)) T_n^{-1},$$

dove $G = \left\{ \frac{j\pi}{n-1} \mid j = 0, \dots, n-1 \right\}$ e

$$T_n = \left[1 - \frac{y}{\pi}, \sin(y), \dots, \sin((n-2)y), \frac{y}{\pi} \right] \Big|_{y \in G}.$$

[A. Aricò, M. D., J. Nagy, S. Serra Capizzano, 2007, sottomesso]



Trasformata antiriflettente

- T_n è detta trasformata antiriflettente.
- Il prodotto matrice vettore con T_n e T_n^{-1} richiede $O(n \log(n))$ operazioni.
- Quando h è la funzione generatrice di una PSF i due autovettori corrispondenti al campionamento di due funzioni lineari sono associati ai due autovalori più grandi $h(0) = h(\pi) = 1$



come per le altre CC autovalori grandi sono associati a basse frequenze mentre autovalori piccoli sono associati ad alte frequenze.



Re-blurring: risultati preliminari

- Nel caso senza rumore le CC forniscono ricostruzioni qualitativamente migliori rispetto alle altre CC.
- Nel caso di rumore è necessario ricorrere alla regolarizzazione (e.g. Tikhonov: $\min_{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n} \{\|\mathbf{Az} - \mathbf{g}\|_2 + \mu\|\mathbf{z}\|_2\}$). In tal caso le CC antiriflettenti possono essere peggiori delle altre CC (almeno rispetto alle CC riflettenti).
- $A^T \notin \mathcal{AR}$ anche quando la PSF è simmetrica.



Re-blurring: risultati preliminari

- Nel caso senza rumore le CC forniscono ricostruzioni qualitativamente migliori rispetto alle altre CC.
- Nel caso di rumore è necessario ricorrere alla regolarizzazione (e.g. Tikhonov: $\min_{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n} \{\|\mathbf{Az} - \mathbf{g}\|_2 + \mu\|\mathbf{z}\|_2\}$). In tal caso le CC antiriflettenti possono essere peggiori delle altre CC (almeno rispetto alle CC riflettenti).
- $A^T \notin \mathcal{AR}$ anche quando la PSF è simmetrica.

Una prima motivazione

Se la PSF è simmetrica per le CC classiche $A^T = A$ mentre per CC antiriflettenti $A^T \neq A$ e non è più un operatore di sfocamento.

[M. D., S. Serra Capizzano, IP, 2005]



Re-blurring

Proposta: Sostituire A^T con A' ottenuta imponendo le CC alla PSF ribaltata rispetto a ogni direzione.



Re-blurring

Proposta: Sostituire A^T con A' ottenuta imponendo le CC alla PSF ribaltata rispetto a ogni direzione.

- Con il re-blurring si risolve $A'Af = A'g$ invece di $A^T Af = A^T g$.
- Il re-blurring sostituisce l'operatore di **trasposizione** con quello di **correlazione**.



Re-blurring

Proposta: Sostituire A^T con A' ottenuta imponendo le CC alla PSF ribaltata rispetto a ogni direzione.

- Con il re-blurring si risolve $A' \mathbf{A} \mathbf{f} = A' \mathbf{g}$ invece di $A^T \mathbf{A} \mathbf{f} = A^T \mathbf{g}$.
- Il re-blurring sostituisce l'operatore di **trasposizione** con quello di **correlazione**.
- Nel caso 1D: $A' = JAJ$ e quindi:
 - $A' = A^T$ per CC zero Dirichlet e periodiche,
 - $A' \neq A^T$ per CC riflettenti con PSF non simmetrica (per PSF simmetrica $A' = A^T$) e CC antiriflettenti anche per PSF simmetrica.
- Se la PSF è simmetrica $A' = A$ e quindi si superano i problemi computazionali!

[M. D., C. Estatico, A. Martinelli, S. Serra Capizzano, IP, 2006]



L'origine del re-blurring

Il modello continuo

$$g(x) = (Kf)(x) = \int k(x - y)f(y)dy$$



L'origine del re-blurring

Il modello continuo

$$g(x) = (Kf)(x) = \int k(x - y)f(y)dy$$

Equazioni normali

- 1 Discretizzazione e imposizione delle CC
- 2 Determinazione della soluzione ai minimi quadrati



L'origine del re-blurring

Il modello continuo

$$g(x) = (Kf)(x) = \int k(x - y)f(y)dy$$

Equazioni normali

- 1 Discretizzazione e imposizione delle CC
- 2 Determinazione della soluzione ai minimi quadrati

Re-blurring (1 \leftrightarrow 2)

- 1 Determinazione della soluzione ai minimi quadrati
- 2 Discretizzazione e imposizione delle CC



Alternativa al re-blurring

- Proposta da M. Christiansen e M. Hanke, SISC, in stampa.
- Caso 1D:
 - 1 si ricostruiscono esattamente le due frequenze relative all'autovalore 1,
 - 2 la parte restante $(n - 2) \times (n - 2)$ è diagonalizzabile mediante DST-I e viene regolarizzata con le tecniche classiche.



Alternativa al re-blurring

- Proposta da M. Christiansen e M. Hanke, SISC, in stampa.
- Caso 1D:
 - 1 si ricostruiscono esattamente le due frequenze relative all'autovalore 1,
 - 2 la parte restante $(n - 2) \times (n - 2)$ è diagonalizzabile mediante DST-I e viene regolarizzata con le tecniche classiche.
- Caso 2D:
 - 1 si ricostruiscono esattamente i quattro angoli,
 - 2 si regolarizzano i 4 problemi 1D dei bordi,
 - 3 si regolarizza l'immagine interna (senza bordo) mediante DST-I bidimensionali.



Alternativa al re-blurring

- Proposta da M. Christiansen e M. Hanke, SISC, in stampa.
- Caso 1D:
 - ① si ricostruiscono esattamente le due frequenze relative all'autovalore 1,
 - ② la parte restante $(n - 2) \times (n - 2)$ è diagonalizzabile mediante DST-I e viene regolarizzata con le tecniche classiche.
- Caso 2D:
 - ① si ricostruiscono esattamente i quattro angoli,
 - ② si regolarizzano i 4 problemi 1D dei bordi,
 - ③ si regolarizza l'immagine interna (senza bordo) mediante DST-I bidimensionali.
- Per valori di rumore non troppo elevati si hanno risultati qualitativamente comparabili al re-blurring.



Implementazione del re-blurring con l'algebra \mathcal{AR}

Data la seguente decomposizione spettrale di A

$$A = T_n D_n T_n^{-1}, \quad T_n = [\mathbf{t}_1 \quad \mathbf{t}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{t}_n], \quad T_n^{-1} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{t}}_1^T \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{t}}_n^T \end{bmatrix}$$

la soluzione regolarizzata mediante tecniche di filtraggio è

$$\mathbf{f}_{\text{reg}} = \sum_{i=1}^n \phi_i \frac{\tilde{\mathbf{t}}_i^T \mathbf{g}}{d_i} \mathbf{t}_i, \quad D_n = \text{diag}(d_i)$$

dove i fattori di filtro ϕ_i sono

$$\phi_i^{\text{tsvd}} = \begin{cases} 1 & \text{if } d_i \geq \delta, \\ 0 & \text{if } d_i < \delta \end{cases} \quad \text{e} \quad \phi_i^{\text{tik}} = \frac{d_i^2}{d_i^2 + \lambda}, \quad \lambda > 0,$$



Osservazioni

- Ponendo $\phi_1 = \phi_n = 1$ si ottiene la tecnica precedente.
- Per la TSVD entrambe calcolano la stessa soluzione, mentre per Tikhonov le due soluzioni saranno tanto più vicine quanto più λ è piccolo.
- L'estensione multidimensionale segue direttamente mediante prodotto di Kronecker come per le CC periodiche e quelle riflettenti.
- I vettori \mathbf{t}_i e $\tilde{\mathbf{t}}_i$ non sono le colonne di una matrice unitaria ma “quasi” \Rightarrow la trasformata antiriflettente e la sua inversa sono stabili.



Outline

- 1 Ricostruzione di immagini sfuocate
 - Condizioni al contorno 1D: segnali
 - Condizioni al contorno 2D: immagini
- 2 L'algebra Antiriflettente
 - Definizione dell'algebra Antiriflettente
 - Regolarizzazione mediante re-blurring
- 3 Risultati numerici
- 4 Conclusioni



Regolarizzazione alla Tikhonov

Tikhonov classico per CC riflettenti:

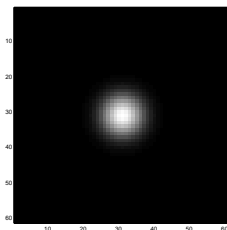
$$(A^T A + \mu I) \mathbf{f} = A^T \mathbf{g}$$

e la sua versione con re-blurring per le CC antiriflettenti:

$$(A' A + \mu I) \mathbf{f} = A' \mathbf{g}.$$



Immagine vera



PSF Gaussiana

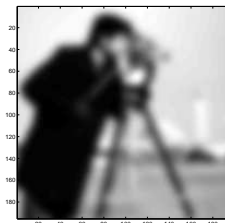


Immagine sfocata

Errore di ricostruzione

Errore di ricostruzione relativo (RRE) definito come $\|\hat{\mathbf{f}} - \mathbf{f}\|_2 / \|\mathbf{f}\|_2$,
dove $\hat{\mathbf{f}}$ è l'approssimazione calcolata della soluzione vera \mathbf{f} .

SNR	Riflettenti	Antiriflettenti
∞	0.1974	0.1815
50	0.1974	0.1839
40	0.1980	0.1900
30	0.2056	0.2031
20	0.2174	0.2175
10	0.2458	0.2500

$\text{SNR} = 20 \log_{10} \|\mathbf{g}_b\|_2 / \|\boldsymbol{\nu}\|_2$, dove \mathbf{g}_b è l'immagine sfocata senza rumore e $\boldsymbol{\nu}$ è il rumore

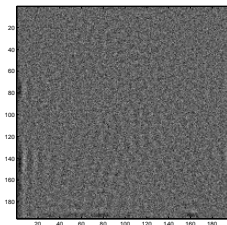


Ricostruzione con $\text{SNR} = 40$.

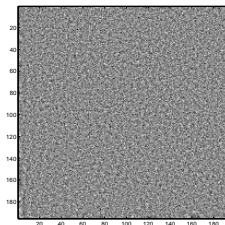
Immagini
ricostruite



Residui
scalati



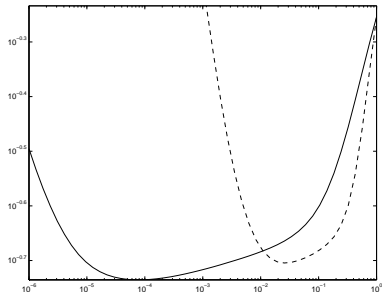
Riflettenti



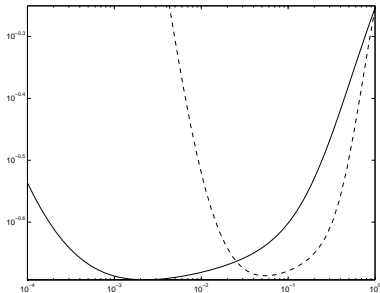
Antiriflettenti

RRE vs μ

CC – Antiriflettenti e – Riflettenti



SNR= 50



SNR= 30

Outline

- 1 Ricostruzione di immagini sfuocate
 - Condizioni al contorno 1D: segnali
 - Condizioni al contorno 2D: immagini
- 2 L'algebra Antiriflettente
 - Definizione dell'algebra Antiriflettente
 - Regolarizzazione mediante re-blurring
- 3 Risultati numerici
- 4 Conclusioni



Conclusioni

- Le CC antiriflettenti con reblurring hanno le stesse proprietà computazionali delle CC riflettenti ma permettono di ottenere ricostruzioni qualitativamente migliori.
- L'importanza di avere buone CC aumenta quando la PSF ha un supporto largo e il rumore non è troppo elevato.

<http://scienze-como.uninsubria.it/mdonatelli/>

