Operatori di aggregazione per metodi multigrid

MARCO DONATELLI

Dipartimento di Fisica e Matematica
Università dell'Insubria - Como

Collaboratori: *M. Bolten, T. Huckle*

"Congresso UMI 2011"
Bologna 12–16 Settembre, 2011

Outline

1. Multigrid e Aggregazione
2. Metodi Multigrid con fattore di riduzione maggiore di 2
3. Convergenza con operatori di Aggregazione
4. Aggregazione + Rilassamento (scelta del parametro)
5. Esempi

Introduzione

- Applicazioni: equazioni differenziali, equazioni integrali, ricostruzione di immagini, problemi su grafi, etc.
- Obiettivo: risolvere sistemi lineari con un costo computazionale proporzionale al prodotto matrice-vettore.
- Strumenti: metodi multigrid con operatori di proiezione costruiti mediante aggregazione (+ rilassamento).

Multigrid Algebrico:

- Indipendente dall'applicazione.
- Definisce il proiettore a partire dal grafo associato alla matrice dei coefficienti del sistema lineare.

Metodi multigrid per sistemi lineari

Idea Due Griglie (un'iterazione):

1. Pochi passi di un metodo iterativo classico (Jacobi, ...).
2. Passare all'equazione dell'errore (permette di sfruttare informazioni spettrali).
3. Proiettare l'equazione dell'errore in una griglia piu' rada.
4. Calcolare l'errore nella griglia rada.
5. Interpolare l'errore e correggere l'approssimazione precedente.

V-cycle (più griglie):

- Il punto 4. è risolto ricorsivamente.

Aggregazione

- L'operatore di proiezione è costruito unendo più nodi vicini.
- Particolamente semplice ed adatto a discretizzazioni agli elementi finiti ed a problemi su grafi

Proprietà:

- Il metodo a due griglie è ottimale [Napov, Notay, NLAA 2010]
- Il metodo a più griglie non e' ottimale e bisogna ricorrere a combinazioni con metodi di Krylov, cicli più complicati o rafforzare il proiettore [Muresan, Notay, SISC 2008]
- Aggregazione con rilassamento: permette di potenziare l'operatore di aggregazione combinandolo con un metodo iterativo con rilassamento classico (scelta del parametro di rilassamento?) [Vanek, Brezina, Mandel, NM 2001]

Metodi Multigrid con riduzione della dimensione arbitraria

- Caso 1D in [D., Serra-Capizzano, Sesana, BIT in stampa].
- m fattore di riduzione in ogni dimensione (multigrid classico $m = 2$).
- L'insieme di tutti gli spigoli di $x \in \mathbb{R}^d$ è

$$\Omega(x) = \left\{ y \in \mathbb{R}^d \;\middle|\; y_j \in \left\{ x_j + \frac{2\pi k}{m} \pmod{2\pi} \right\} \right\},$$

$$k = 0, \dots, m-1, \qquad j = 1, \dots, d.$$

  Questo è l'insieme di tutte le frequenze della griglia fine che corrispondono alla stessa frequenza nella griglia rada.
- L'insieme dei punti "mirror" di x è:

$$\mathcal{M}(x) = \Omega(x) \setminus \{x\}.$$

Problema proiettato

- Condizioni al contorno periodiche: f simbolo della matrice dei coefficienti circolante $A_n = C_n(f)$.
- $f \geq 0$ e si annulla solo in x^0.
- K_n^m: down-sampling che seleziona un elemento ogni m.
- Proiettore: $P_n(p) = K_n^m C_n(p)$.
- La matrice nella griglia più rada $A_{n/m} = P_n(p) A_n P_n(p)^H$ è t.c. $A_{n/m} = C_{n/m}(f_c)$

$$f_c(x) = \frac{1}{m^d} \sum_{y \in \Omega(x/m)} |p|^2 f(y), \qquad x \in [0, 2\pi)^d.$$

Convergenza metodo a Due Griglie

Proposizione 1

Sia $A_n = C_n(f)$ la matrice dei coefficienti con $f \geq 0$ avente un unico zero in x^0. Definendo $P_n(p) = K_n^m C_n(p)$, dove p è un polinomio trigonometrico non identicamente nullo e tale che per $x \in [-\pi, \pi)^d$

$$\limsup_{x \to x^0} \frac{|p(y)|^2}{f(x)} = c < +\infty, \qquad \forall\, y \in \mathcal{M}(x), \tag{1a}$$

dove

$$\sum_{y \in \Omega(x)} p(y)^2 > 0, \tag{1b}$$

allora definendo $A_{n/m} = P_n(p) A_n P_n(p)^H$ il metodo a due griglie è ottimale.

Esempio 2D

- Discretizzazione del Laplaciano con differenze finite su 9 nodi. Simbolo:

$$f(x,y) = 1 - \frac{1}{4}\left(\cos(x) + \cos(y) + \cos(x+y) + \cos(x-y)\right).$$

Stencil:

$$L_9 = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

- Stencil per operatori di aggregazione di 4 e 9 nodi:

$$G_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \qquad G_9 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Operatori di aggregazione

- Il simbolo di un operatore di aggregazione in d-dimensioni che aggrega m nodi in ogni dimensione è:

$$a(x) = \prod_{j=1}^{d} \sum_{k=0}^{m-1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx_j}, \qquad x \in \mathbb{R}^d. \tag{2}$$

- Per $x^0 = 0$, i.e., $f(0) = 0$ e $f(x) > 0$ per $x \neq 0$ (Laplaciano, etc.), abbiamo che

$$\begin{aligned} a(x^0) &= m^d \\ a(y_s) &= 0, \qquad y_s \in \mathcal{M}(x^0) \\ a(x) &= 0, \qquad x_j = \frac{2\pi s}{m},\ s = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Convergenza per operatori di aggregazione

Proposizione 2

Sia $a(x)$ definito in (2), allora esiste $0 < c < +\infty$ tale che

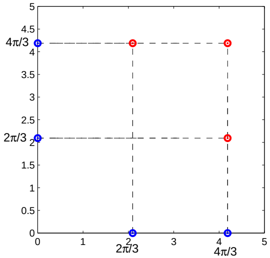
$$\limsup_{x\to 0} \frac{|a(y)|}{\sum_{j=1}^{d} x_j^r} = c, \qquad y \in \mathcal{M}(x). \tag{3}$$

dove $r = d - \#\{y_j \mid y_j = 0,\ j = 1, \ldots, d\}$ è il numero di componenti non nulle.

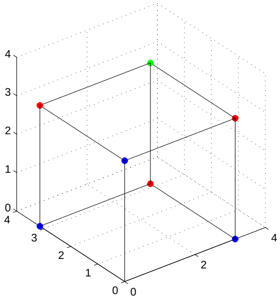
- Combinando le Proposizioni 2 e 1 si ottiene che per $p(x) = a(x)$ (proiettore = operatore di aggegazione) per $r = 2$ (Laplaciano, ...) il metodo a due griglie è ottimale.
- Per il V-ciclo $\frac{p^2}{f} \to \frac{p}{f} \Rightarrow$ non si ha ottimalità.

Esempi

2D e $m = 3$



3D e $m = 2$



blu$\rightarrow r = 1$, rosso $\rightarrow r = 2$, verde $\rightarrow r = 3$.

Aggregazione + Rilassamento

- Nei punti blu dove $r = 1$ il proiettore mediante aggregazione non è sufficiente per ottenere l'ottimalità del V-ciclo.
- Si combina il proiettore con un passo di un metodo iterativo con rilassamento.
- Il proiettore diventa

$$P_n(p) = K_n^m C_n(a) C_n(s_\omega),$$

dove $C_n(s_\omega)$ è la matrice d'iterazione del metodo iterativo.

- Considerando Richardson

$$s_\omega(x) = 1 - \omega f(x).$$

- ω ottimo determinato in modo tale che $s_{\omega_{\mathrm{opt}}}(y) = 0$ per $y \in \mathcal{M}(x)$ con $r = 1$.

Esempi 2D

- Si considerino le seguenti discretizzazioni del Laplaciano

$$L_5 = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad L_9 = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

- $m = 2 \Longrightarrow s_{\omega_{\mathrm{opt}}}(0, \pi) = 0$
- $m = 3 \Longrightarrow s_{\omega_{\mathrm{opt}}}(0, \frac{2}{3}\pi) = s_{\omega_{\mathrm{opt}}}(0, \frac{4}{3}\pi) = 0$
- Valori di $\omega_{\mathrm{opt}} \Longrightarrow$

m	L_5	L_9
2	1	2/3
3	4/3	8/9

- Per $m = 2$ indipendentemente dalla $f(x, y)$ si ha che

$$s(x, y) = \cos(x) + \cos(y)$$

si annulla in $(0, \pi)$ e $(\pi, 0)$ $(\sum_{y\in\Omega(\frac{\pi}{2})} p(y)^2 = 0!)$.

Esempio 3D

- Stencil della discretizzazione del Laplaciano 3D utilizzando elementi finiti trilineari su cubi

$$\frac{1}{128}\begin{bmatrix} -4 & -8 & -4 \\ -8 & 0 & -8 \\ -4 & -8 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -8 & 0 & -8 \\ 0 & 128 & 0 \\ -8 & 0 & -8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 & -8 & -4 \\ -8 & 0 & -8 \\ -4 & -8 & -4 \end{bmatrix}$$

- Simbolo: $f(x,y,z) = 1 - \frac{1}{4}(\cos(x)\cos(y) + \cos(x)\cos(z) + \cos(y)\cos(z) + \cos(x)\cos(y)\cos(z))$.
- $m = 2$:
  $f(0,0,\pi) = f(0,\pi,0) = f(\pi,0,0) = \frac{3}{2} \Longrightarrow \omega_{\mathrm{opt}} = \frac{2}{3}$
- In lavori precedenti è stato osservato sperimentalmente che $\omega = \frac{2}{3}$ è una buona scelta [Vanek, Mandel, Brezina, SISC 1996].

Conclusioni

- Definizione di metodi multigrid con fattori di riduzione maggiori di 2 in ogni dimensione.
- Analisi di convergenza per proiettori di aggregazione.
- Criteri di ottimalità per la scelta del parametro di rilassamento per smoothed aggregation.