Ricostruzione di immagini con condizioni al contorno anti-riflettenti e metodi multigrid

Marco Donatelli Ph.D. Thesis "Image deconvolution and multigrid methods"

Dipartimento di Fisica e Matematica Università dell'Insubria

http://scienze-como.uninsubria.it/mdonatelli/



Outline

1 Ricostruzione di immagini sfuocate Matrice associata alla PSF Regolarizzazione

2 Condizioni al contorno Anti-riflettenti Proprietà strutturali Re-blurring Risultati numerici

Regolarizzazione Multigrid Regolarizzazione Multigrid iterativa Risultati numerici

4 Lavoro futuro



Outline

- Ricostruzione di immagini sfuocate Matrice associata alla PSF Regolarizzazione
 - 2 Condizioni al contorno Anti-riflettenti Proprietà strutturali Re-blurring Risultati numerici
 - Regolarizzazione Multigrid Regolarizzazione Multigrid iterativa Risultati numerici
- 4 Lavoro futuro



Il problema modello

L'immagine ricostruita **f** è ottenuta "risolvendo":

$$A\mathbf{f} = \mathbf{g}$$

- g = vec(G) dove G è
 immagine osservata = immagine sfuocata + rumore
- A = matrice bilivello associata alla point spread function (PSF).
- La PSF è l'osservazione di un singolo punto (e.g., una stella in astronomia) ed è assunta spazio invariante.



Obiettivi della ricostruzione

Requisiti

- Buona qualità dell'immagine ricostruita
- Possibilità di ricondurre il calcolo a trasformate veloci stile FFT

Come soddisfare i requisiti

- Modellisticamente nella formalizzazione del problema
- 2 Computazionalmente nella definizione di metodi regolarizzanti



Condizioni al contorno classiche

Condizioni al contorno classiche sull'immagine F di dimensione $n \times n$:

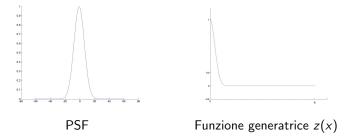
zero-Dirichlet (D-BCs)	Periodic (P-BCs)	Reflective (R-BCs)	
0 0 0 0 F 0 0 0 0	F	F_{rc} F_r F_{rc} F_c F F_c F_{rc} F_r F_{rc} F_c , F_r , F_{rc} "flip" di colonne e/o righe di F	
вттв вссв		Block $T + H$ with $T + H$ blocks (DCT-III bilivello)	

- Il prodotto matrice vettore costa $O(n^2 \log(n))$ ops,
- L'inversione costa $O(n^2 \log(n))$ ops solo per P-BCs e DCT-III.



Proprietà della PSF

• Gli autovalori di A(z) sono approssimativamente un campionamento uniforme della z.



 Il sottospazio malcondizionato è principalmente costituito dalle medie/alte frequenze.



Regolarizzazione alla Tikhonov

- Tikhonov: Si risolvere

$$\min_{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^N} \Big\{ \|A\mathbf{z} - \mathbf{g}\|_2^2 + \mu \|\mathbf{z}\|_2^2 \Big\},$$

ovvero il sistema lineare

$$(A^TA + \mu I)\mathbf{f} = A^T\mathbf{g}.$$

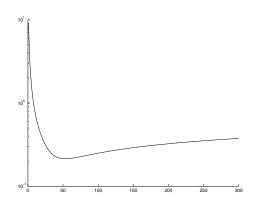


Metodi iterativi regolarizzanti

Semiconvergenza:

Alcuni metodi iterativi (Landweber, CG, CGNE ...) hanno proprietà regolarizzanti: l'errore di ricostruzione prima descresce e poi crescere.

Esempio:





Outline

- Ricostruzione di immagini sfuocate Matrice associata alla PSF Regolarizzazione
- 2 Condizioni al contorno Anti-riflettenti Proprietà strutturali Re-blurring Risultati numerici
- 3 Regolarizzazione Multigrid Regolarizzazione Multigrid iterativa Risultati numerici
- 4 Lavoro futuro



Definizione delle condizioni antiriflettenti

In ogni direzione si opera un'antiriflessione rispetto al bordo.

• In 1D l'antiriflessione si ottiene mediante

$$f_{1-j} = 2f_1 - f_{j+1}$$

 $f_{n+j} = 2f_n - f_{n-j}$

- Le R-BCs garantiscono la continuità al bordo mentre le condizioni al contorno antiriflettenti (AR-BCs) garantiscono la continuità anche della derivata normale.
- Proposta originale: S. SERRA CAPIZZANO, SIAM J. Sci. Comput., 25–4 (2004), pp. 1307–1325.
- Analisi 2D: M. Donatelli, C. Estatico, J. Nagy, L. Perrone, and S. Serra-Capizzano, SPIE's 48th Annual Meeting, 2003, San Diego, CA USA, F. Luk Ed, Vol. 5205 pp. 380-389.

Proprietà strutturali (caso 1D)

PSF generica

- A = Toeplitz + Hankel + rango 2.
- Prodotto matrice-vettore in $O(n \log(n))$ ops.

PSF fortemente simmetrica

• Per $S \in \mathbb{R}^{(n-2)\times (n-2)}$ diagonalizzabile mediante DST-I

$$A = \left[\begin{array}{cccc} 1 & & & & & \\ * & & & * & \\ \vdots & & S & & \vdots \\ * & & & * & \\ & & & 1 \end{array} \right]$$



Algebra anti-riflettente 1D

$$S_1 = \left\{ M \middle| M = \begin{bmatrix} \alpha & \mathbf{0}^T & 0 \\ \mathbf{v} & \hat{M} & \mathbf{w} \\ 0 & \mathbf{0}^T & \beta \end{bmatrix}, \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \ \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n-2}, \ \hat{M} \in \tau_{n-2} \right\}.$$

Theorem

Siano $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in \mathbb{R}^n$, allora per $M \in \mathcal{S}_1$:

- (i) ogni sistema lineare $M\mathbf{f} = \mathbf{g}$ può essere risolto in $O(n \log(n))$ ops se M è invertibile;
- (ii) ogni prodotto matrice vettore $\mathbf{g} := M\mathbf{f}$ costa $O(n \log(n))$ ops;
- (iii) S_1 è un algebra, i.e., è chiusa per combinazioni lineari, prodotti e inversione.

Caso multidimensionale si generalizza mediante prodotto tensore.



Risultati preliminari

- Nel caso senza rumore le AR-BCs permettono una ricostruzione qualitativamente superiore rispetto alle altre BCs.
- Nel caso in cui sia presente anche il rumore è necessaria la regolarizzazione. Ad esempio CG applicato alle equazioni normali $A^T A \mathbf{f} = A^T \mathbf{g}$ o Tikhonov.
- In tal caso le AR-BCs risultano peggiori delle altre BCs (almeno delle R-BCs).

Motivazione

Per PSF fortemente simmetrica con le altre BCs $A^T = A$ mentre per le AR-BCs $A^T \neq A$ e non è più un operatore di blur (filtro passa-basso).



Re-blurring

Proposta: Sostituire A^T con A' ottenuta imponendo le condizioni al contorno alla PSF ruotata di 180° .

Con il re-blurring si risolve

$$A'A\mathbf{f} = A'\mathbf{g}$$

invece di $A^T A \mathbf{f} = A^T \mathbf{g}$.

Osservazione:

Il re-blurring sostituisce la transposizione con la correlazione



L'origine del re-blurring

Il modello continuo della sfuocatura

$$g(x) = (Kf)(x) = \int k(x - y)f(y)dy$$

Equazioni normali

- 1 Discretizzazione ed imposizione delle condizioni al contorno
- 2 Ricerca di una soluzione ai minimi quadrati

Re-blurring $(1 \leftrightarrow 2)$

- Ricerca di una soluzione ai minimi quadrati
- 2 Discretizzazione ed imposizione delle condizioni al contorno



Proprietà algebriche

- Per le AR-BCs e PSF fortemente simmetrica si superano i problemi computazionali grazie all'algebra S_d .
- Caso 1D e PSF generica

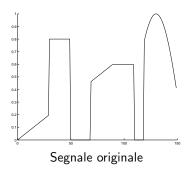
$$A' = JAJ$$

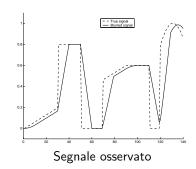
con J matrice di flip.

- Per T Toeplitz vale $T^T = JTJ \Rightarrow$ per D-BCs e P-BCs il re-blurring è identico alle equazioni normali.
- Per H Hankel in generale $H^T \neq JHJ \Rightarrow$ se la PSF non è almeno centro-simmetrica per le R-BCs il re-blurring è diverso dalle equazioni normali (per le AR-BCs sempre!).



R-BCs: re-blurring vs. equazioni normali







R-BCs: re-blurring vs. equazioni normali

Errore di ricostruzione relativo con R-BCs

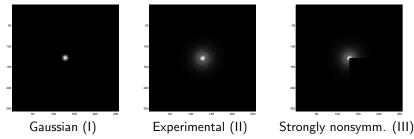
	Normal Equations		Re-blurring	
SNR	CG	Tikhonov	CG	Tikhonov
∞ (0% noise)	0.0756	0.0753	0.0971	0.1041
100	0.0889	0.1051	0.0969	0.1085
50	0.1138	0.1315	0.0984	0.1179
40	0.1233	0.1417	0.0996	0.1249
30	0.1311	0.1534	0.1070	0.1334
20	0.1399	0.1789	0.1300	0.1540
10	0.1734	0.2278	0.1574	0.2000



Risultati numerici con re-blurring

 Si è esteso un toolbox (RestoreTools) per Matlab sviluppato da J. Nagy et al. aggiungendo le AR-BCs.

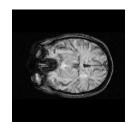
PSFs





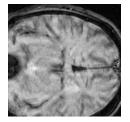
Immagini originali















Boat

Brain

Saturn

Boat e PSF (I): immagini ricostruite con SNR = 40.

Observed

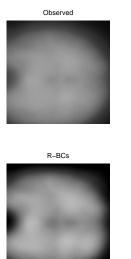


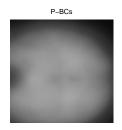


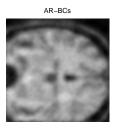




Brain e PSF (II): immagini ricostruite con SNR = 40.



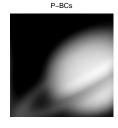


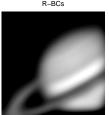


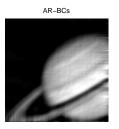


Saturn e PSF (III): immagini ricostruite con SNR = 40.









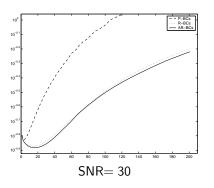


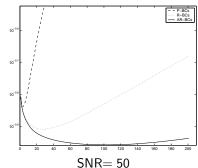
Experimental PSF (II): CG errore di ricostruzione ottimo.

		Boat			Saturn	
SNR	P-BCs	R-BCs	AR-BCs	P-BCs	R-BCs	AR-BCs
∞	0.2550	0.1849	0.1545	0.2594	0.2020	0.0959
50	0.2550	0.1872	0.1553	0.2594	0.2020	0.0961
40	0.2553	0.1897	0.1565	0.2595	0.2021	0.0988
30	0.2568	0.1962	0.1739	0.2610	0.2042	0.1226
20	0.2716	0.2311	0.2204	0.2730	0.2208	0.1736
10	0.3924	0.3770	0.3784	0.3773	0.3488	0.3337



Errore di ricostruzione per le prime 200 iterazioni di CG per l'immagine Boat e PSF (I).







Bibliografia

- Proposta re-blurring 1D (PSF simmetrica): M. DONATELLI AND S. SERRA CAPIZZANO, Anti-reflective boundary conditions and re-blurring, Inverse Problems, 21 (2005) pp. 169–182.
- Analisi ed estensione nonsimmetrica e multidimensionale: M.
 DONATELLI, C. ESTATICO, AND S. SERRA-CAPIZZANO, Improved
 image deblurring with anti-reflective boundary conditions and
 re-blurring, submitted.



Outline

- Ricostruzione di immagini sfuocate Matrice associata alla PSF Regolarizzazione
- 2 Condizioni al contorno Anti-riflettent Proprietà strutturali Re-blurring Risultati numerici
- Regolarizzazione Multigrid Regolarizzazione Multigrid iterativa Risultati numerici
- 4 Lavoro futuro



Multigrid

Idea Multigrid

Proiettare il sistema lineare in un sottospazio, risolvere il sistema risultante in tale sottospazio ed interpolare la soluzione al fine di migliorare l'approssimazione precedente.

Componenti del Multigrid

Il Multigrid combina due metodi iterativi:

Smoother: un metodo iterativo classio,

Coarse Grid Correction: proiezione, risoluzione del problema ristretto, interpolazione.

Ai livelli inferiori si lavora sull'equazione dell'errore!



Multigrid per matrici strutturate

Preservare la struttura

- Per applicare ricorsivamente il MGM è necessario preservare la stessa struttura ad ogni livello (Toeplitz, ...).
- Per ogni struttura derivante dalle BCs proposte esistono proiettori in grado di preservare la struttura.

$$\mathbf{P}_i = K_{N_i} \mathcal{A}_{N_i}(p)$$
:

- $K_{N_i} \in \mathbb{R}^{\frac{N_i}{4} \times N_i}$ è la matrice di taglio che preserva la struttura al livello inferiore.
- p(x, y) è la funzione generatrice del proiettore che seleziona il sottospazio dove proiettare il sistema lineare.



Regolarizzazione Multigrid

- Nella ricostruzione di immagini sfuocate il sottospazio malcondizionato è generato dalle alte frequenze, mentre il sottospazio bencondizionato è generato dalle basse frequenze.
- Per ottenere un risolutore veloce il multigrid algebrico proietta nelle alte frequenze dove "vive" il rumore ⇒ esplosione dell'errore alle prime iterazioni (richiede regolarizzazione alla Tikhonov [Donatelli, NLAA, 12 (2005), pp. 715–729]).
- Filtro passa-basso proietta nel sottospazio bencondizionato (basse frequenze) ⇒ converge lentamente ma può essere un buon metodo iterativo regolarizzante [Donatelli & Serra-Capizzano SISC 27–6 (2006) pp. 2053–2076].



Regolarizzazione Multigrid Regolarizzaz

Il Multigrid come metodo iterativo regolarizzante

Regolarizzazione Multigrid iterativa

Se abbiamo un *metodo iterativo regolarizzante* possiamo migliorare le sue proprietà di regolarizzazione e/o accelerare la sua convergenza utilizzandolo come *smoother* in un algoritmo Multigrid.

Regolarizzazione

Le proprietà regolarizzanti dello smoother sono preservate perchè viene combinato con un filtro passa-basso.



Regolarizzazione Two-Level (TL)

Idea: proiettare nelle basse frequenze e poi applicare un metodo iterativo regolarizzante.

TL come specializzazione del TGM

Smoother: metodo iterativo regolarizzante

Proiettore: filtro passa-basso

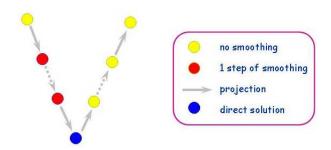
Algoritmo TL

- No smoothing al livello superiore.
- Al livello inferiore un passo di smoother invece di risolvere direttamente il sistema lineare.



Regolarizzazione Multigrid (applica ricorsivamente il TL)

V-cycle



Utilizzando un numero maggiore di chiamate ricorsive (e.g. W-cycle), l'algoritmo "lavora" maggiormente nel sottospazio bencondizionato, ma è più difficile un criterio di stop anticipato.

Costo computazionale

Ipotesi: immagini $n \times n$ e PSFs $m \times m$ con $m \ll n$.

- Sia S(n) il costo computazionale di una iterazione di smoother.
- Il costo computazionale di una iterazione del nostro multigrid regolarizzante ($\gamma=$ n. chiamate ricorsive) è

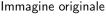
$$C(\gamma, n) \approx \left\{ egin{array}{ll} rac{1}{3}S(n), & \gamma = 1 \\ S(n), & \gamma = 2 \\ 3S(n), & \gamma = 3 \end{array}
ight.$$



Saturno

- BCs Periodiche con bordo nero (esatte)
- PSF gaussiana + SNR = 20
- Vincolo di nonnegatività





PSF

Sfuocata + SNR = 20



Errore Minimo

 e_j = errore di ricostruzione alla j-esima iterazione.

METODO	$\min_{j=1,}(e_j)$	$\underset{j=1,}{\operatorname{argmin}}(e_j)$
CG ⁺	0.2268	4
Rich ⁺	0.2298	9
MGM(Rich ⁺ ,1) ⁺	0.1556	27
MGM(Rich ⁺ ,2) ⁺	0.1530	12
RichNE ⁺	0.1419	2735
CGNE ⁺	0.1419	885
MGM(CGNE ⁺ ,2) ⁺	0.1389	109



Immagini Ricostruite



 Rich^+ (9 iter.)



MGM(Rich⁺,2)⁺ (12 iter.)



CGNE⁺ (885 iter.)



Immagini Ricostruite



MGM(CGNE⁺,2)⁺ (109 iter.)



MGM(Rich⁺,2)⁺ (12 iter.)



CGNE⁺ (885 iter.)



Numerical results

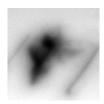
- P-BCs
- Gaussian PSF (A spd)
- noise = 1%



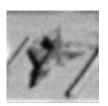
True image



Inner part 128×128



Observed image

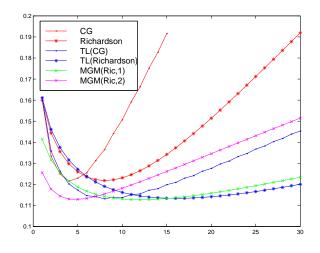


Restored with MGM



Restoration error: noise = 1%

Restoration error vs. iteration number





Outline

- Ricostruzione di immagini sfuocate Matrice associata alla PSF Regolarizzazione
- 2 Condizioni al contorno Anti-riflettenti Proprietà strutturali Re-blurring Risultati numerici
- Regolarizzazione Multigrid Regolarizzazione Multigrid iterativa Risultati numerici
- 4 Lavoro futuro



Lavoro futuro

Modellistico

- Analisi teorica della strategia di re-blurring.
- In generale (per riflettenti o anti-riflettenti) A'A non è sempre s.p.d. ma il CG non ha break-down (almeno in tutti i nostri test).
- Calcolo della decomposizione spettrale per le AR-BCs e sue applicazioni.

Regolarizzazione multigrid

- Analisi teorica delle proprietà regolarizzanti del multigrid regolarizzante proposto.
- Combinazione del multigrid regolarizzante con tecniche di edge enhancing (e.g. wavelets).

