Regolarizzazione multigrid per la ricostruzione di immagini

Marco Donatelli
Stefano Serra Capizzano
(marco.donatelli@uninsubria.it)

Università dell'Insubria, Dip. Fisica e Matematica - Sede di Como
Via Valleggio 11 - 22100 Como, Italy

Schema presentazione

- Ricostruzione di immagini con BC
- Proprietà spettrali delle matrici coinvolte
- Il Metodo Multigrid
- Regolarizzazione Two-Level e Multigrid
- Esperimenti numerici
- Regolarizzazione Multigrid non iterativa

Ricostruzione di immagini con BC

Imponendo condizioni al contorno (BC), l'immagine ricostruita $\mathbf{f}$ è ottenuta risolvendo

$$A\mathbf{f} = \mathbf{g} + \mathbf{n}$$

- $\mathbf{g}$ = immagine sfuocata
- $\mathbf{n}$ = rumore (vettore random)
- A = matrice bilivello strutturata generata dalla PSF (consideriamo A spd)

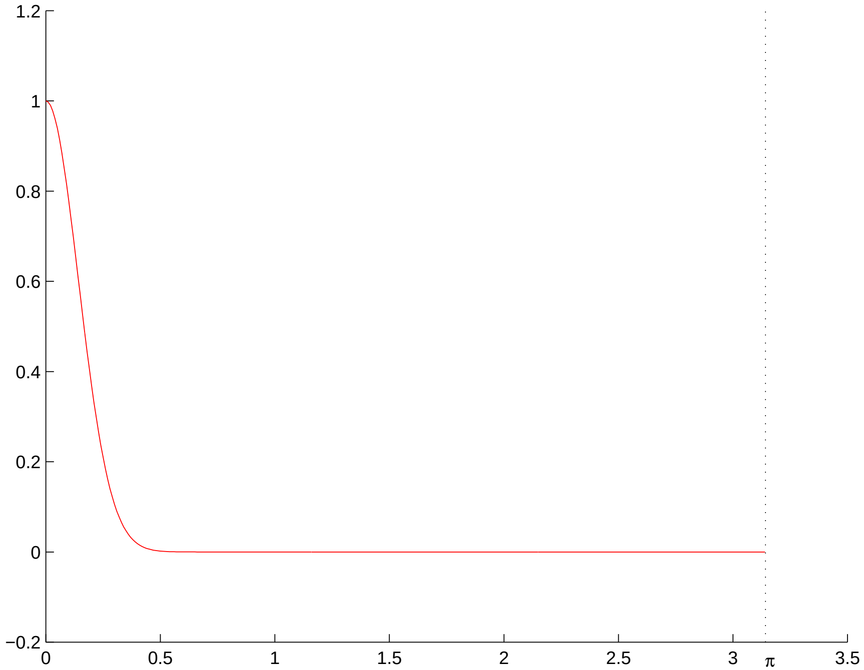
BC	A
Dirichlet	Toeplitz
periodiche	circolante
riflettenti	coseni
antiriflettenti	seni + correzione

Funzione generatrice della PSF

- Problema 1D con PSF gaussiana:

$\mathbf{x} = -5 : 0.1 : 5$	101 punxti
$\mathbf{a} = \mathrm{e}^{-\mathbf{x}^2}$	coefficienti PSF
$\mathbf{a} = (a_{-50}, \ldots, a_0, \ldots, a_{50}),\ a_i = a_{-i}$	
$z(y) = \sum_{i=-50}^{50} a_i \mathrm{e}^{-\mathrm{i}y}$	funzione generatice

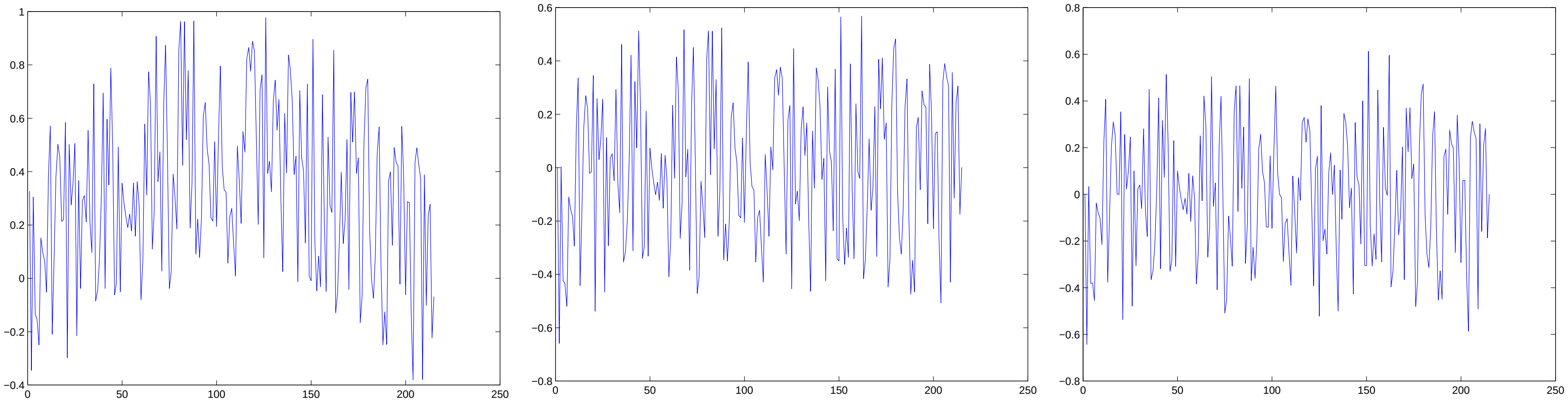
Gli autovalori di $A(z)$ sono approssimativamente un campionamento uniforme di z in $[0, \pi]$



- Il sottospazio malcondizionato è nelle alte frequenze

Smoothing

- Metodi iterativi regolarizzanti (es: Richardson, CG, . . .) nei primi passi riducono l'errore nelle basse frequenze (sottospazio ben condizionato).
- Esempio: $\mathbf{f} = \sin(x),\ x \in [0, \pi]$ e $\mathbf{g} = A\mathbf{f}$. Si approssima $\mathbf{f}$ risolvendo il sistema lineare $A\mathbf{f} = \mathbf{g}$ con Richardson.



Errore iniziale | Dopo 1 iterazione | Dopo 5 iterazioni

- L'errore risulta sempre altamente oscillante anche dopo 10 iterazioni.

Schema Multigrid

- Idea base: proiettare il sistema in un sottospazio di dimensione minore, risolvere il sistema in tale sottospazio ed interpolare la soluzione ottenuta per migliorare l'approssimazione precedente.
- Una generica iterazione j del Metodo Two-Grid (TGM) per il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$:

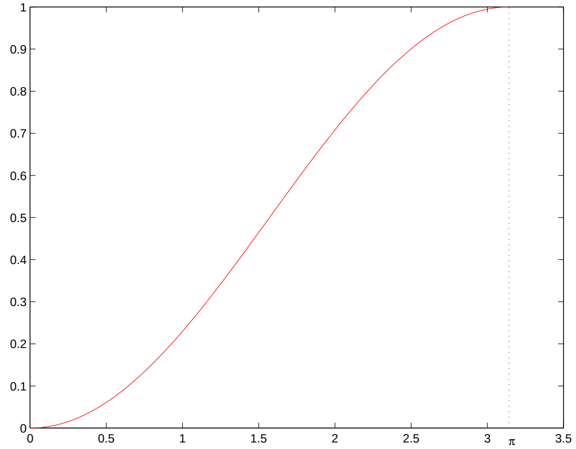
$$\boxed{\begin{array}{l}
\textbf{(1)}\ \tilde{\mathbf{x}} = Smooth(A, \mathbf{x}^{(j)}, \mathbf{b}, \nu) \\
\textbf{(2)}\ \mathbf{r}_1 = \mathbf{P}(\mathbf{b} - A\tilde{\mathbf{x}}) \\
\textbf{(3)}\ A_1 = \mathbf{P}A\mathbf{P}^H \\
\textbf{(4)}\ \mathbf{e}_1 = A_1^{-1}\mathbf{r}_1 \\
\textbf{(5)}\ \mathbf{x}^{(j+1)} = \mathbf{x}^{(j)} + \mathbf{P}^H\mathbf{e}_1
\end{array}}$$

- Multigrid: al punto (4) invece di risolvere direttamente si applica ricorsivamente l'algoritmo.

Multigrid Geometrico

- E' un risolutore ottimale per PDE

  Nelle PDE il sottospazio malcondizionato è quello delle basse frequenze.
  Esempio: Laplaciano.



- Per il proiettore un scelta semplice ed efficace è:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & & & & \\ & & 1 & 2 & 1 & & \\ & & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(media pesata)}$$

$$\mathbf{P}^T = 2\mathbf{P} \qquad \text{(interpolazione lineare)}$$

Multigrid Algebrico

- Sfrutta informazioni spettrali sulla matrice dei coefficienti e non informazioni geometriche sul problema che non sempre esistono o sono utilizzabili.
- I vari smoother hanno un comportamento spettrale simile: nelle prime iterazioni non riescono ad abbattere efficacemente l'errore nel sottospazio generato dagli autovettori relavi ad autovalori piccoli (sottospazio malcondizionato)

$$\Downarrow$$

  proiettore scelto in modo tale da proiettare l'equazione dell'errore in tale sottospazio.
- Una buona scelta del proiettore porta a metodi multigrid particolarmente veloci.
- Per matrici Toeplitz ed in algebra vedere ad esempio [Aricò, Donatelli, Serra Capizzano, SIAMAX, in stampa].

Ricostruzione di immagini e Multigrid

- Nei problemi di ricostruzione di immagini il sottospazio malcondizionato è quello delle alte frequenze mentre quello bencondizionato è quello delle basse frequenze.
- Il multigrid algebrico per ottenere una convergenza rapida proietta nel sottospazio delle alte frequenze dove “vive” il rumore $\Longrightarrow$ esplosione dell’errore già alla prima iterazione (utilizzo di Tikhonov [Donatelli SPIE’s Conferense 2003]).
- Il multigrid geometrico proietta nel sottospazio bencondizionato quindi converge molto lentamente $\Longrightarrow$ può essere un buon regolarizzatore.

Proiettando nel sottospazio delle basse frequenze si ottiene un metodo iterativo lento ma che risente meno degli effetti del rumore $\Leftrightarrow$ regolarizzazione

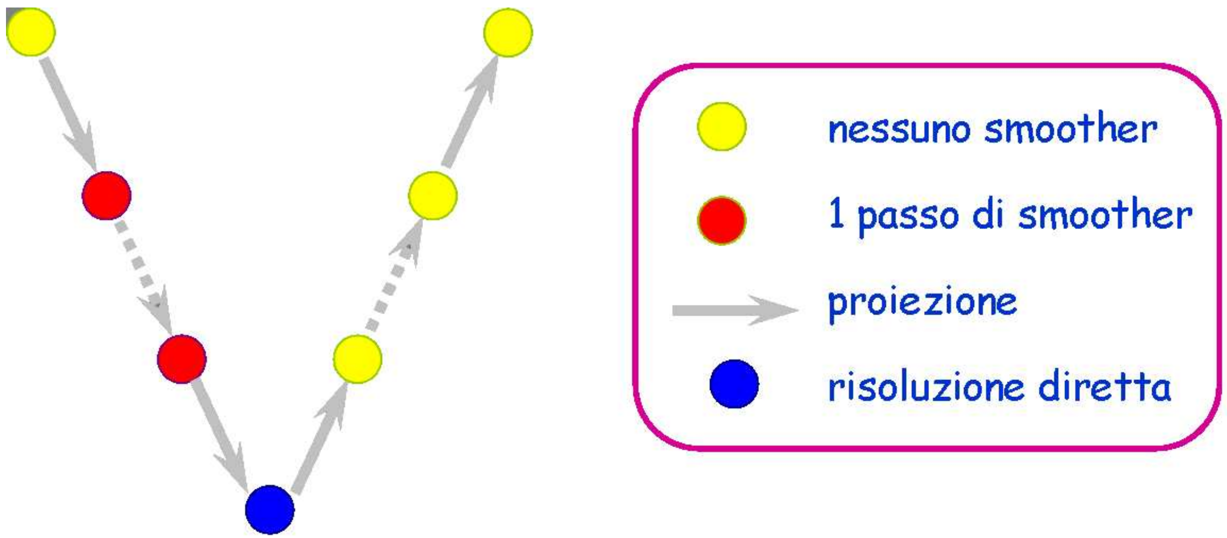
Regolarizzazione Two-Level (TL)

- Algoritmo di regolarizzazione Two-Level (TL) (specializzazione del TGM):
  1. Non si applica lo smoother al passo (1): $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^{(j)}$
  2. Al passo (4): $\mathbf{e}_1 = A_1^{-1}\mathbf{r}_1 \rightarrow Smooth(A_1, \mathbf{e}_1, \mathbf{r}_1, \nu)$

  Lo smoother può essere un qualsiasi metodo regolarizzante.
- Poiché nella griglia più fine non viene fatto nessun lavoro si può proiettare il sistema $A\mathbf{f} = \mathbf{g}$ invece dell'equazione dell'errore $A\mathbf{e} = \mathbf{r}$.
- Con $\mathbf{P} =$ media pesata applicata all'immagine osservata $\mathbf{g}$ si ha un effetto prima di reblurring (smorzamento del rumore) e poi di campionamento (si prende un pixel ogni due).
- Con $\mathbf{P}^T =$ interpolazione lineare si possono ricostruire esattamente le funzioni lineari a tratti smorzando le oscillazioni dovute al rumore.

Regolarizzazione Multigrid

- Applicando ricorsivamente l'algoritmo bilivello si ottiene un metodo Mulrigrid.
- V-cycle



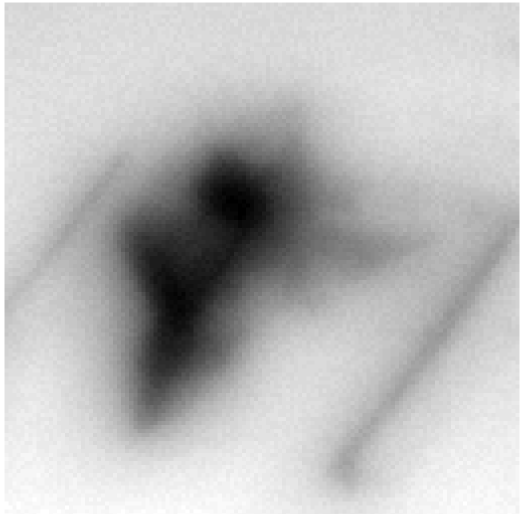
- Con un numero maggiore di chiamate ricorsive (es: W-cycle) si "lavora" di più nel sottospazio bencondizionato ma è più difficile controllare la storia di convergenza del metodo.

Esempio 1 (aereo)

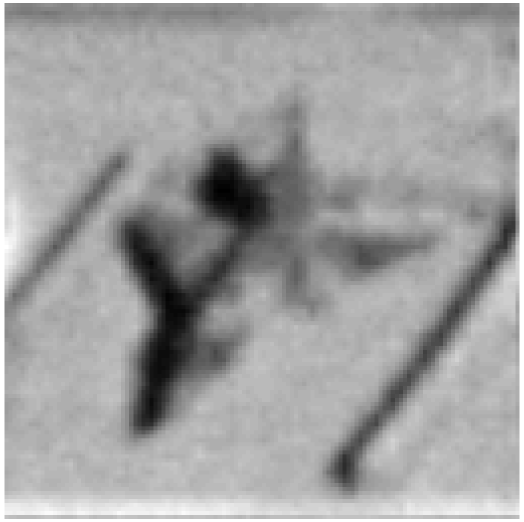
- BC periodiche e SNR = 100
- PSF gaussiana e A spd

Immagine originale

Porzione 128×128



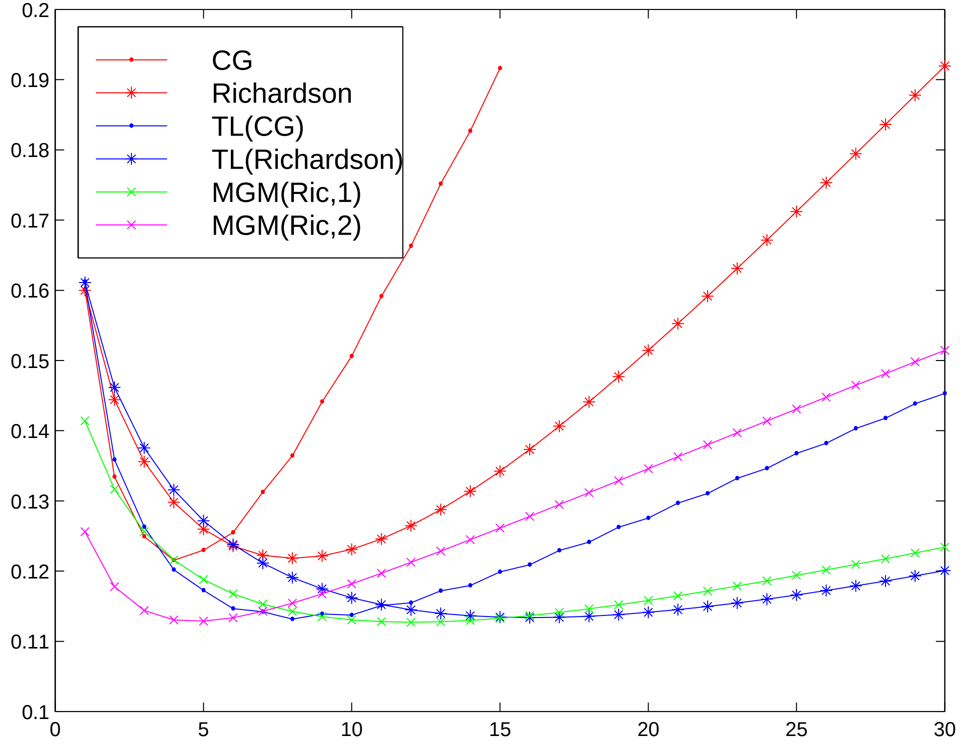
Sfuocata + SNR = 100



Ricostruita con MGM

Errore di ricostruzione (esempio 1)

Andamento dell'errore di ricostruzione $e_j = \|\bar{\mathbf{f}} - \mathbf{f}^{(j)}\|_2 / \|\bar{\mathbf{f}}\|_2$ al variare del numero di iterazioni risolvendo il sistema lineare $A\mathbf{f} = \mathbf{g} + \mathbf{n}$.



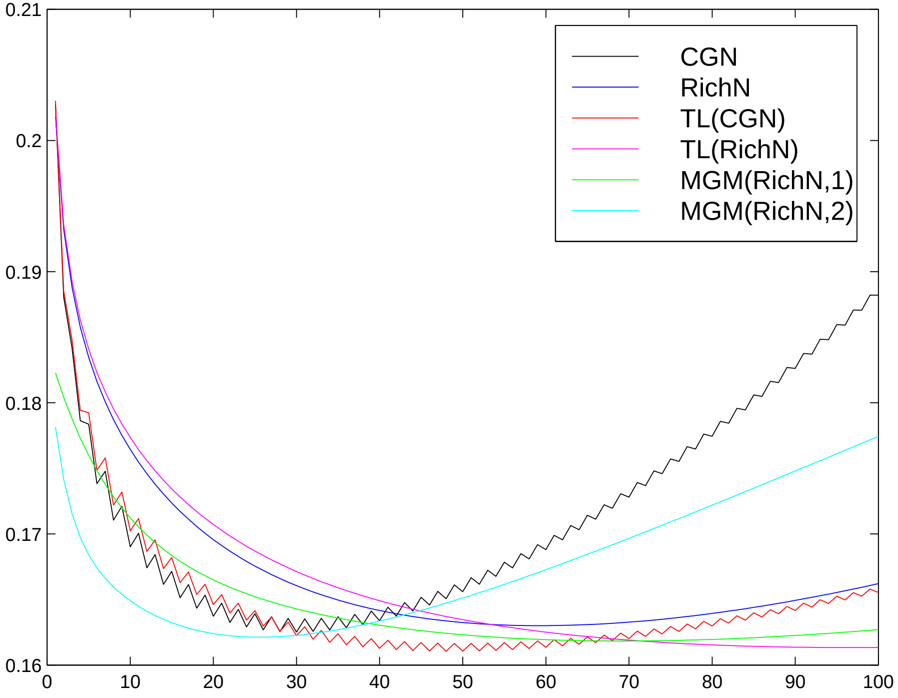
Errore relativo vs. numero di iterazioni

Method	$\min_{j=1,\dots} (e_j)$	$\arg\min_{j=1,\dots} (e_j)$
CG	0.1215	4
Richardson	0.1218	8
TL(CG)	0.1132	8
TL(Rich)	0.1134	16
MGM(Rich, 1)	0.1127	12
MGM(Rich, 2)	0.1129	5
CGN	0.1135	178
RichN	0.1135	352

Minimo errore di ricostruzione

Esempio 2 (SNR = 10)

- Stessa immagine e stessa PSF ma molto più rumore: SNR $=$ 10.
- Per CG e Richardson è necessario passare alle equazioni normali.



Errore relativo vs. numero di iterazioni

Method	$\min_{j=1,\ldots}(e_j)$	$\arg\min_{j=1,\ldots}(e_j)$
CGN	0.1625	30
RichN	0.1630	59
TL(CGN)	0.1611	48
TL(RichN)	0.1613	97
MGM(RichN,1)	0.1618	69
MGM(RichN,2)	0.1621	26
MGM(Rich,1)	0.1648	3
MGM(Rich,2)	0.1630	1

Minimo errore di ricostruzione

Esempio 3 (Saturno)

- BC periodiche e SNR $= 50$
- PSF gaussiana e $\lambda(A) \approx -10^{-4}$

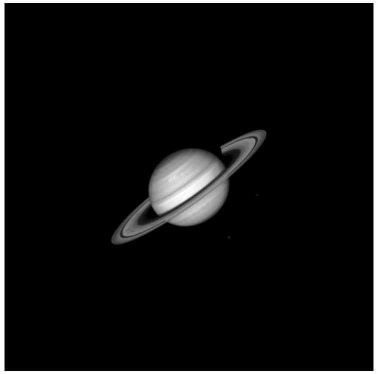
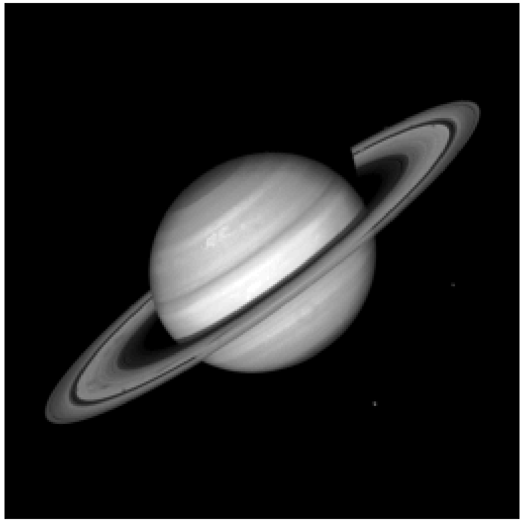
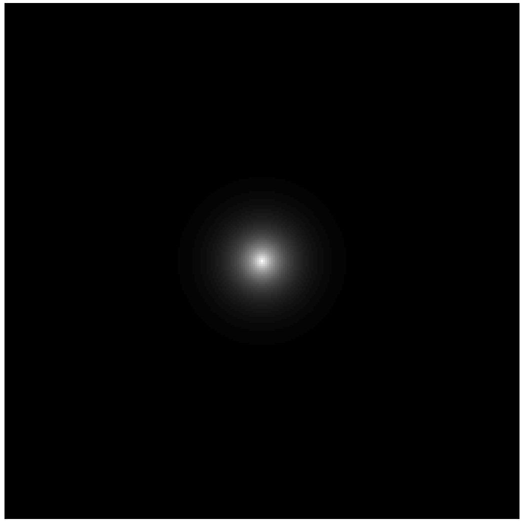


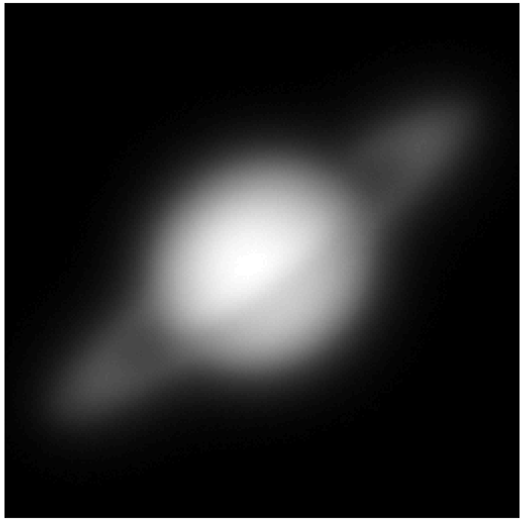
Immagine originale



Porzione 128×128



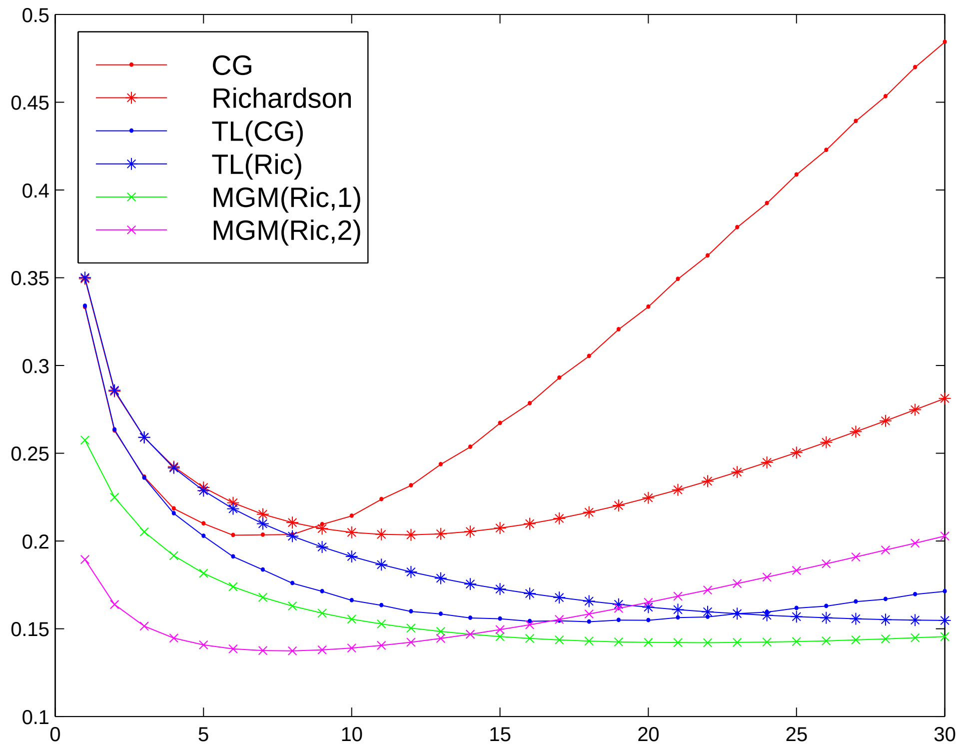
PSF



Sfuocata + SNR $= 50$

Errore di ricostruzione (esempio 3)

Andamento dell'errore di ricostruzione $e_j = \|\bar{\mathbf{f}} - \mathbf{f}^{(j)}\|_2 / \|\bar{\mathbf{f}}\|_2$ al variare del numero di iterazioni risolvendo il sistema lineare $A\mathbf{f} = \mathbf{g} + \mathbf{n}$.



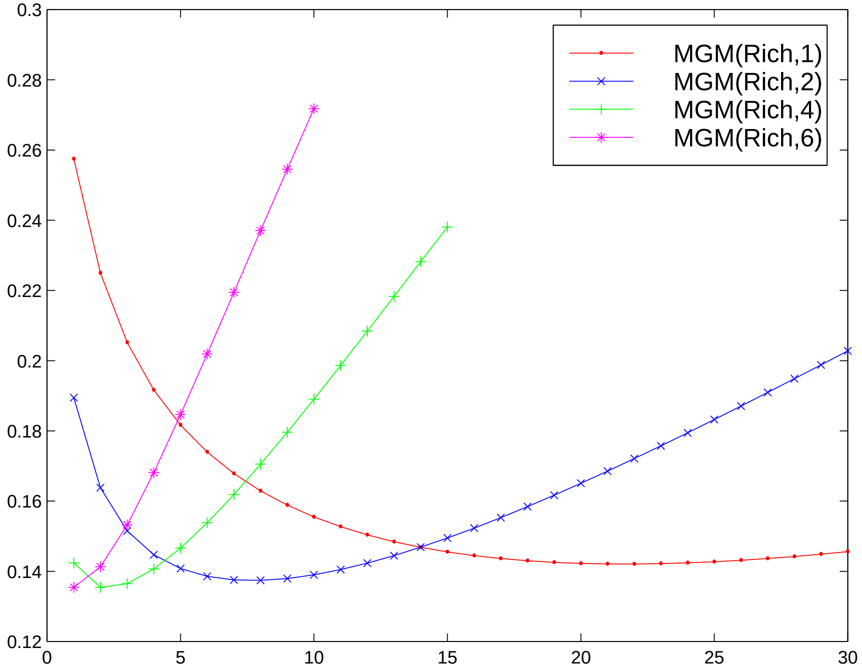
Errore relativo vs. numero di iterazioni

Method	$\min\limits_{j=1,\ldots} (e_j)$	arg $\min\limits_{j=1,\ldots} (e_j)$
CG	0.2033	6
Richardson	0.2035	12
TL(CG)	0.1539	18
TL(Rich)	0.1547	30
MGM(Rich,1)	0.1421	22
MGM(Rich,2)	0.1374	8
CGN	0.1329	2000

Minimo errore di ricostruzione

Regolarizzazione multigrid non iterativa

- Andamento dell'errore dopo solo una iterazione di MGM(Rich,γ) al variare di γ.
- Non è più un metodo iterativo, il parametro di regolarizzazione è γ.



Errore relativo vs. numero di iterazioni

γ	e_1
1	0.25747
2	0.18944
3	0.15723
4	0.14241
5	0.13658
6	0.13543
7	0.13674
8	0.13947

Con il CGN si raggiunge un minimo pari a 0.1329 dopo 2000 iterazioni

Conclusioni

- Il Multigrid Algebrico risolve velocemente il problema algebrico ma richiede una regolarizzazione alla Tikhonov.
- Il Multigrid Geometrico con uno smoother tipo Richardson è un ottimo regolarizzatore.
- Il Two-Level è una tecnica molto generica che può essere utilizzata per risolvere un'immagine $n \times n$ con il costo computazionale di un'immagine $\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}$ e solitamente ottenendo un errore di ricostruzione minore.
- Metodo robusto anche per nel caso di piccoli autovalori negativi.
- Solitamente non necessita di passare alle equazioni normali.
- Può portare ad una serie di generalizzazioni.