Proprietà regolarizzanti dei metodi Multigrid

Marco Donatelli

Dipartimento di Fisica e Matematica
Università dell'Insubria

www.mat.unimi.it/user/donatel

14 Febbraio 2004

Outline

Outline

Il Sistema Lineare

Imponendo condizioni al contorno (BCs), l'immagine ricostruita $\mathbf{f}$ è ottenuta risolvendo (in qualche senso...)

$$A\mathbf{f} = \mathbf{g} + \mathbf{n}$$

Il Sistema Lineare

Imponendo condizioni al contorno (BCs), l'immagine ricostruita $\mathbf{f}$ è ottenuta risolvendo (in qualche senso...)

$$A\mathbf{f} = \mathbf{g} + \mathbf{n}$$

- $\mathbf{g}$ = immagine sfuocata

Il Sistema Lineare

Imponendo condizioni al contorno (BCs), l'immagine ricostruita $\mathbf{f}$ è ottenuta risolvendo (in qualche senso...)

$$A\mathbf{f} = \mathbf{g} + \mathbf{n}$$

- $\mathbf{g}$ = immagine sfuocata
- $\mathbf{n}$ = rumore (vettore random)

Il Sistema Lineare

Imponendo condizioni al contorno (BCs), l'immagine ricostruita $\mathbf{f}$ è ottenuta risolvendo (in qualche senso...)

$$A\mathbf{f} = \mathbf{g} + \mathbf{n}$$

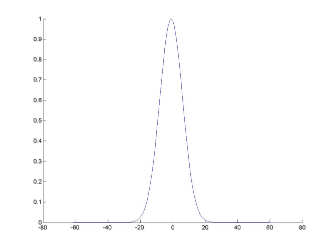
- $\mathbf{g}$ = immagine sfuocata
- $\mathbf{n}$ = rumore (vettore random)
- A = matrice bilivello strutturata generata dalla PSF

BCs	A
Dirichlet	Toeplitz
periodiche	circolante
riflettenti	DCT III
antiriflettenti	DST I + correzione

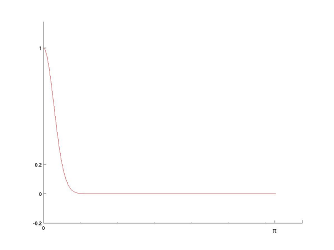
Funzione generatrice della PSF

- PSF gaussiana

Funzione generatrice della PSF

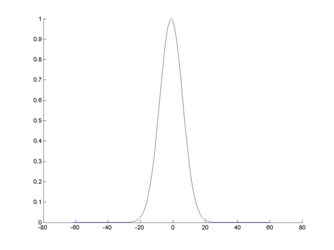
- PSF gaussiana
- 

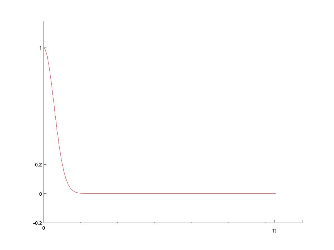
PSF



Funzione generatrice $z(x)$

Funzione generatrice della PSF

- PSF gaussiana
- 



PSF

Funzione generatrice $z(x)$

- Il sottospazio malcondizionato di $A(z)$ è costituito principalmente dalle alte frequenze.

Metodi iterativi regolarizzanti

Metodi iterativi particolarmente lenti (es: Landweber, CGNE, . . .) manifestano proprietà regolarizzanti.

Metodi iterativi regolarizzanti

Metodi iterativi particolarmente lenti (es: Landweber, CGNE, . . .) manifestano proprietà regolarizzanti.

Motivazione

- Nei primi passi riducono l'errore nelle basse frequenze (sottospazio ben condizionato).
- Quando passano a ridurre l'errore algebrico nelle alte frequenze l'errore della ricostruzione, a causa degli effetti del rumore, aumenta.

Outline

Multigrid per Matrici Strutturate

Struttura del Multigrid

Smoother: metodo iterativo classico (regolarizzante).

Multigrid per Matrici Strutturate

Struttura del Multigrid

Smoother: metodo iterativo classico (regolarizzante).

Proiettore: permette di selezionare il sottospazio in cui si vuole ridurre maggiormente l'errore nelle griglie più rade ai livelli inferiori.

Multigrid per Matrici Strutturate

Struttura del Multigrid

Smoother: metodo iterativo classico (regolarizzante).

Proiettore: permette di selezionare il sottospazio in cui si vuole ridurre maggiormente l'errore nelle griglie più rade ai livelli inferiori.

Preservare la Struttura della matrice

- Per applicare ricorsivamente l'algoritmo è necessario che il proiettore preservi la struttura (Toeplitz, Circolante, ...) delle matrici ai livelli inferiori.

Multigrid per Matrici Strutturate

Struttura del Multigrid

Smoother: metodo iterativo classico (regolarizzante).

Proiettore: permette di selezionare il sottospazio in cui si vuole ridurre maggiormente l'errore nelle griglie più rade ai livelli inferiori.

Preservare la Struttura della matrice

- Per applicare ricorsivamente l'algoritmo è necessario che il proiettore preservi la struttura (Toeplitz, Circolante, ...) delle matrici ai livelli inferiori.
- Per tutte le strutture derivanti dalle BCs presentate sono stati definiti proiettori che permettono di preservare la struttura.

Definizione del Proiettore

Struttura del Proiettore

Matrice di Taglio: dimensione $n \times n/2$, permette di preservare la struttura al livello inferiore.

Definizione del Proiettore

Struttura del Proiettore

Matrice di Taglio: dimensione $n \times n/2$, permette di preservare la struttura al livello inferiore.

Funzione Generatrice: seleziona il sottospazio in cui proiettare il sistema lineare.

Definizione del Proiettore

Struttura del Proiettore

Matrice di Taglio: dimensione $n \times n/2$, permette di preservare la struttura al livello inferiore.

Funzione Generatrice: seleziona il sottospazio in cui proiettare il sistema lineare.

Filtro passa-basso

- Proiettare nelle basse frequenze per ridurre gli effetti del rumore:

$$\text{Filtro Passa-Basso} \quad \Leftrightarrow \quad p(x,y) = (1+\cos(x))(1+\cos(y))$$

Definizione del Proiettore

Struttura del Proiettore

Matrice di Taglio: dimensione $n \times n/2$, permette di preservare la struttura al livello inferiore.

Funzione Generatrice: seleziona il sottospazio in cui proiettare il sistema lineare.

Filtro passa-basso

- Proiettare nelle basse frequenze per ridurre gli effetti del rumore:

$$\text{Filtro Passa-Basso} \quad \Leftrightarrow \quad p(x,y) = (1+\cos(x))(1+\cos(y))$$

- $\searrow$ Media Pesata

Definizione del Proiettore

Struttura del Proiettore

Matrice di Taglio: dimensione $n \times n/2$, permette di preservare la struttura al livello inferiore.

Funzione Generatrice: seleziona il sottospazio in cui proiettare il sistema lineare.

Filtro passa-basso

- Proiettare nelle basse frequenze per ridurre gli effetti del rumore:

$$\text{Filtro Passa-Basso} \quad \Leftrightarrow \quad p(x,y) = (1+\cos(x))(1+\cos(y))$$

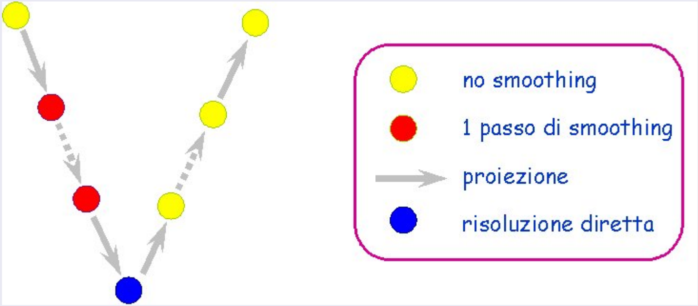
- $\searrow$ Media Pesata $\qquad \nearrow$ Interpolazione Lineare

Framework Multilivello Regolarizzante

Se abbiamo un metodo iterativo regolarizzante possiamo aumentarne le proprietà regolarizzanti e/o accelerarne la convergenza utilizzandolo come smoother nel multigrid.

Framework Multilivello Regolarizzante

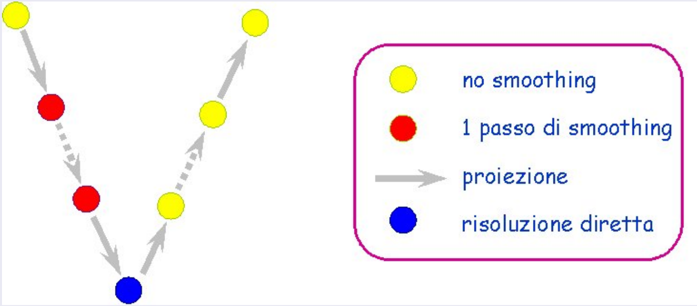
Se abbiamo un metodo iterativo regolarizzante possiamo aumentarne le proprietà regolarizzanti e/o accelerarne la convergenza utilizzandolo come smoother nel multigrid.



Framework Multilivello Regolarizzante

Regolarizzazione

Le proprietà regolarizzanti dello smoother vengono preservate perché viene combinato con un filtro passa-basso.



Costo computazionale

Precomputing

Calcolo e memorizzazione delle PSF (matrici dei coefficienti) relative alle griglie più rade ($A_{i+1} = P_i^T A_i P_i$) $\Rightarrow O(\log(n))$

Costo computazionale

Precomputing

Calcolo e memorizzazione delle PSF (matrici dei coefficienti) relative alle griglie più rade ($A_{i+1} = P_i^T A_i P_i$) $\Rightarrow O(\log(n))$

Ciclo Multigrid

- Il problema al livello j ha dimensione $n_j \times n_j$ con $n_j = n/2^j$.

Costo computazionale

Precomputing

Calcolo e memorizzazione delle PSF (matrici dei coefficienti) relative alle griglie più rade ($A_{i+1} = P_i^T A_i P_i$) $\Rightarrow O(\log(n))$

Ciclo Multigrid

- Il problema al livello j ha dimensione $n_j \times n_j$ con $n_j = n/2^j$.
- Costo Proiezione al livello j: $\searrow \frac{7}{4}\, n_j^2, \quad \nearrow \frac{7}{8}\, n_j^2$ flops.

Costo computazionale

Precomputing

Calcolo e memorizzazione delle PSF (matrici dei coefficienti) relative alle griglie più rade ($A_{i+1} = P_i^T A_i P_i$) $\Rightarrow O(\log(n))$

Ciclo Multigrid

- Il problema al livello j ha dimensione $n_j \times n_j$ con $n_j = n/2^j$.
- Costo Proiezione al livello j: $\searrow \frac{7}{4} n_j^2$, $\nearrow \frac{7}{8} n_j^2$ flops.
- Sia $W(n)$ il costo di una iterazione di smoother

$$W(n) = cn^2 + O(n), \quad c \gg 1.$$

Costo computazionale

Precomputing

Calcolo e memorizzazione delle PSF (matrici dei coefficienti) relative alle griglie più rade ($A_{i+1} = P_i^T A_i P_i$) $\Rightarrow O(\log(n))$

Ciclo Multigrid

- Il costo complessivo al livello j è circa
$$c_j = W(n_j) + \frac{21}{8} n_j^2 \text{ flops.}$$

Costo computazionale

Precomputing

Calcolo e memorizzazione delle PSF (matrici dei coefficienti) relative alle griglie più rade ($A_{i+1} = P_i^T A_i P_i$) $\Rightarrow O(\log(n))$

Ciclo Multigrid

- Il costo complessivo al livello j è circa
$$c_j = W(n_j) + \tfrac{21}{8} n_j^2 \text{ flops.}$$
- Il costo totale di una iterazione di Multigrid è:

$$\frac{21}{8}n^2 + \sum_{j=1}^{\log_2(n)-1} c_j < \frac{7}{2}n^2 + \frac{4}{3}W\left(\frac{n}{2}\right) \approx \frac{1}{3}W(n).$$

Costo computazionale per cicli più complessi

Modificare il numero di Chiamate Ricorsive

- Una sola chiamata ricorsiva (proiezione) $\Rightarrow$ schema a V.

Costo computazionale per cicli più complessi

Modificare il numero di Chiamate Ricorsive

- Una sola chiamata ricorsiva (proiezione) $\Rightarrow$ schema a V.
- Aumentando il numero di chiamate ricorsive (proiezioni consecutive) l'algoritmo lavora maggiormente nel sottospazio relativo alle basse frequenze, diventa però più difficile definire il criterio di arresto (il metodo accelera).

Costo computazionale per cicli più complessi

Modificare il numero di Chiamate Ricorsive

- Una sola chiamata ricorsiva (proiezione) $\Rightarrow$ schema a V.
- Aumentando il numero di chiamate ricorsive (proiezioni consecutive) l'algoritmo lavora maggiormente nel sottospazio relativo alle basse frequenze, diventa però più difficile definire il criterio di arresto (il metodo accelera).
- γ = numero di chiamate ricorsive, il costo di una iterazione è

$$C(\gamma, n) \leq \left(\frac{21}{2} + c\gamma\right)\frac{n^2}{4-\gamma} \approx \begin{cases} \frac{1}{3}W(n), & \gamma = 1 \\ W(n), & \gamma = 2 \\ 3W(n), & \gamma = 3 \end{cases}$$

$$C(\gamma, n) \leq \begin{cases} O(n^2 \log(n)), & \gamma = 4 \\ O(n^{2\log_4(\gamma)}), & \gamma > 4 \end{cases}$$

Outline

Saturno

- BCs Periodiche con bordo nero (esatte)
- PSF gaussiana + SNR = 20

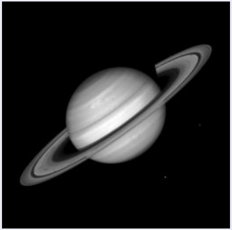
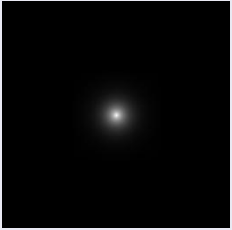


Immagine originale



PSF

Sfuocata + SNR = 20

Vincolo di Non-Negatività

Il multigrid preserva la non-negatività?

- Il proiettore (media pesata e interpolazione lineare) preserva l'eventuale vincolo di non-negatività.

Vincolo di Non-Negatività

Il multigrid preserva la non-negatività?

- Il proiettore (media pesata e interpolazione lineare) preserva l'eventuale vincolo di non-negatività.
- Utilizzando un metodo proiettato come Smoother non si soddisfa il vincolo di non-negativita' (causa: risoluzione diretta all'ultimo livello).

Vincolo di Non-Negatività

Il multigrid preserva la non-negatività?

- Il proiettore (media pesata e interpolazione lineare) preserva l'eventuale vincolo di non-negatività.
- Utilizzando un metodo proiettato come Smoother non si soddisfa il vincolo di non-negativita' (causa: risoluzione diretta all'ultimo livello).

Preservare la non-negatività con il multigrid

- Proiettare l'approssimazione calcolata ad ogni iterazione.

Vincolo di Non-Negatività

Il multigrid preserva la non-negatività?

- Il proiettore (media pesata e interpolazione lineare) preserva l'eventuale vincolo di non-negatività.
- Utilizzando un metodo proiettato come Smoother non si soddisfa il vincolo di non-negativita' (causa: risoluzione diretta all'ultimo livello).

Preservare la non-negatività con il multigrid

- Proiettare l'approssimazione calcolata ad ogni iterazione.
- Utilizzare come Smoother un metodo proiettato + proiettare l'approssimazione calcolata ad ogni iterazione.

Errore Minimo

e_j = errore relativo alla j-esima iterazione.

Metodo	$\min_{j=1,\ldots} (e_j)$	$\arg\min_{j=1,\ldots} (e_j)$
CG^+	0.2268	4
$Rich^+$	0.2298	9
MGM($Rich^+$,1)	0.1736	17
MGM(Rich,1)$^+$	0.1600	15
MGM($Rich^+$,1)$^+$	0.1556	27
MGM($Rich^+$,2)$^+$	0.1530	12
$RichNE^+$	0.1419	2735
$CGNE^+$	0.1419	885
MGM($CGNE^+$,2)$^+$	0.1389	109
MGM($CGNE^+$,3)$^+$	0.1388	45

Errore Minimo

e_j = errore relativo alla j-esima iterazione.

METODO	$\min_{j=1,\ldots}(e_j)$	$\arg\min_{j=1,\ldots}(e_j)$
CG^+	0.2268	4
$Rich^+$	0.2298	9
$MGM(Rich^+,1)$	0.1736	17
$MGM(Rich,1)^+$	0.1600	15
$MGM(Rich^+,1)^+$	0.1556	27
$MGM(Rich^+,2)^+$	0.1530	12
$RichNE^+$	0.1419	2735
$CGNE^+$	0.1419	885
$MGM(CGNE^+,2)^+$	0.1389	109
$MGM(CGNE^+,3)^+$	0.1388	45

Errore Minimo

e_j = errore relativo alla j-esima iterazione.

Metodo	$\min_{j=1,\dots}(e_j)$	$\arg\min_{j=1,\dots}(e_j)$
CG^+	0.2268	4
$Rich^+$	0.2298	9
$MGM(Rich^+,1)$	0.1736	17
$MGM(Rich,1)^+$	0.1600	15
$MGM(Rich^+,1)^+$	0.1556	27
$MGM(Rich^+,2)^+$	0.1530	12
$RichNE^+$	0.1419	2735
$CGNE^+$	0.1419	885
$MGM(CGNE^+,2)^+$	0.1389	109
$MGM(CGNE^+,3)^+$	0.1388	45

Errore Minimo

e_j = errore relativo alla j-esima iterazione.

Metodo	$\min_{j=1,\ldots}(e_j)$	$\arg\min_{j=1,\ldots}(e_j)$
CG^+	0.2268	4
$Rich^+$	0.2298	9
$MGM(Rich^+,1)$	0.1736	17
$MGM(Rich,1)^+$	0.1600	15
$MGM(Rich^+,1)^+$	0.1556	27
$MGM(Rich^+,2)^+$	0.1530	12
$RichNE^+$	0.1419	2735
$CGNE^+$	0.1419	885
$MGM(CGNE^+,2)^+$	0.1389	109
$MGM(CGNE^+,3)^+$	0.1388	45

Errore Minimo

e_j = errore relativo alla j-esima iterazione.

Metodo	$\min_{j=1,\dots}(e_j)$	$\arg\min_{j=1,\dots}(e_j)$
CG^+	0.2268	4
$Rich^+$	0.2298	9
MGM($Rich^+$,1)	0.1736	17
MGM(Rich,1)$^+$	0.1600	15
MGM($Rich^+$,1)$^+$	0.1556	27
MGM($Rich^+$,2)$^+$	0.1530	12
$RichNE^+$	0.1419	2735
$CGNE^+$	0.1419	885
MGM($CGNE^+$,2)$^+$	0.1389	109
MGM($CGNE^+$,3)$^+$	0.1388	45

Errore Minimo

e_j = errore relativo alla j-esima iterazione.

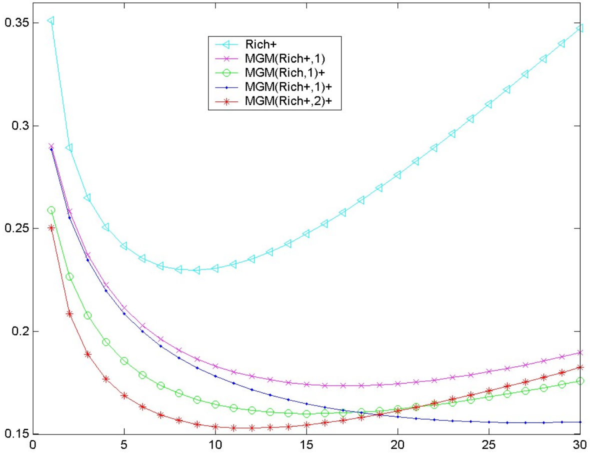
METODO	$\min_{j=1,\ldots}(e_j)$	$\arg\min_{j=1,\ldots}(e_j)$
CG^+	0.2268	4
$Rich^+$	0.2298	9
$MGM(Rich^+,1)$	0.1736	17
$MGM(Rich,1)^+$	0.1600	15
$MGM(Rich^+,1)^+$	0.1556	27
$MGM(Rich^+,2)^+$	0.1530	12
$RichNE^+$	0.1419	2735
$CGNE^+$	0.1419	885
$MGM(CGNE^+,2)^+$	0.1389	109
$MGM(CGNE^+,3)^+$	0.1388	45

Errore Minimo

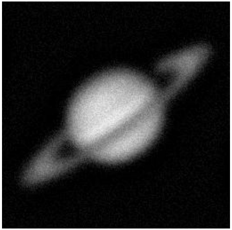
e_j = errore relativo alla j-esima iterazione.

METODO	$\min_{j=1,\ldots}(e_j)$	$\arg\min_{j=1,\ldots}(e_j)$
CG^+	0.2268	4
$Rich^+$	0.2298	9
MGM($Rich^+$,1)	0.1736	17
$MGM(Rich,1)^+$	0.1600	15
$MGM(Rich^+,1)^+$	0.1556	27
$MGM(Rich^+,2)^+$	0.1530	12
$RichNE^+$	0.1419	2735
$CGNE^+$	0.1419	885
$MGM(CGNE^+,2)^+$	0.1389	109
$MGM(CGNE^+,3)^+$	0.1388	45

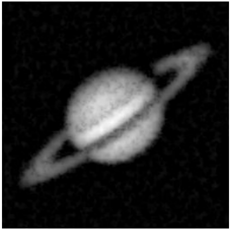
Andamento dell'errore di ricostruzione



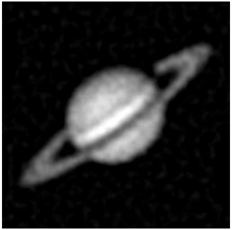
Immagini Ricostruite



Rich$^+$ (9 iter.)



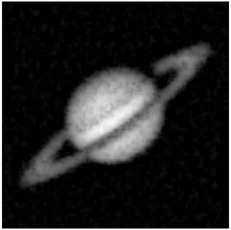
MGM(Rich$^+$,2)$^+$ (12 iter.)



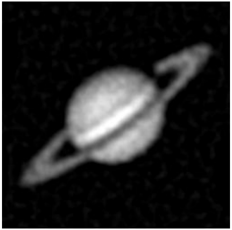
CGNE$^+$ (885 iter.)

Immagini Ricostruite

MGM(CGNE$^+$,2)$^+$ (109 iter.)



MGM(Rich$^+$,2)$^+$ (12 iter.)



CGNE$^+$ (885 iter.)

Potenziare il Proiettore

Si può evitare di passare alle equazioni normali rafforzando le proprietà di filtraggio del proiettore con:

$$p(x, y) = (1 + \cos(x))^{\alpha}(1 + \cos(y))^{\alpha}, \qquad \alpha \in \mathbb{N}^{+}.$$

Potenziare il Proiettore

Si può evitare di passare alle equazioni normali rafforzando le proprietà di filtraggio del proiettore con:

$$p(x,y) = (1+\cos(x))^{\alpha}(1+\cos(y))^{\alpha}, \qquad \alpha \in \mathbb{N}^{+}.$$

Conseguenze Computazionali

- Il costo computazionale di una iterazione di W-Cycle diviene

$$C(\alpha, n) \leq \left(\frac{72\alpha^2 + 90\alpha - 11}{16} + 2c\right) n^2$$

Potenziare il Proiettore

Si può evitare di passare alle equazioni normali rafforzando le proprietà di filtraggio del proiettore con:

$$p(x, y) = (1 + \cos(x))^\alpha (1 + \cos(y))^\alpha, \qquad \alpha \in \mathbb{N}^+.$$

Conseguenze Computazionali

- Il costo computazionale di una iterazione di W-Cycle diviene

$$C(\alpha, n) \leq \left(\frac{72\alpha^2 + 90\alpha - 11}{16} + 2c \right) n^2$$

- Condizionamento del sistema lineare: sia f_j la funzione generatrice di A_j e β_j l'ordine del suo zero in $[\pi, \pi]$, allora $\beta_j = \beta_0 + 2j\alpha$ (num. cond. $= O(n_j^{\beta_j})$).

Potenziare il Proiettore

Proiezione e Re-blurring generalizzato

Il proiettore oltre ad effettuare il filtraggio, ha anche un effetto di doppio re-blurring in quanto $A_{i+1} = P_i^T A_i P_i$.

Potenziare il Proiettore

Proiezione e Re-blurring generalizzato

Il proiettore oltre ad effettuare il filtraggio, ha anche un effetto di doppio re-blurring in quanto $A_{i+1} = P_i^T A_i P_i$.

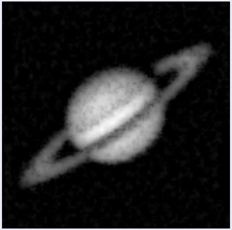
Risultati Numerici con MGM(Rich$^+$,2)$^+$

α	$\min\limits_{j=1,\dots}(e_j)$	$\arg\min\limits_{j=1,\dots}(e_j)$
1	0.1530	12
2	0.1454	21
3	0.1433	29
4	0.1417	38
5	0.1408	48

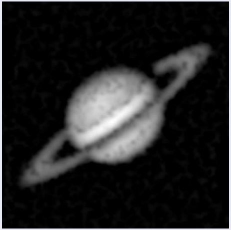
Potenziare il Proiettore

Proiezione e Re-blurring generalizzato

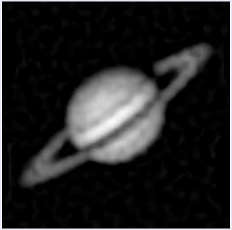
Il proiettore oltre ad effettuare il filtraggio, ha anche un effetto di doppio re-blurring in quanto $A_{i+1} = P_i^T A_i P_i$.



MGM(Rich$^+$,2)$^+$
(12 iter.)



MGM(Rich$^+$,2)$^+$
($\alpha = 4$ in 38 iter.)



MGM(CGNE$^+$,2)$^+$
(109 iter.)

Outline

Riassumendo ...

Caratteristiche Multigrid Regolarizzante

- E' un Framework generale che può essere utilizzato per potenziare le proprietà regolarizzanti di un qualsiasi metodo iterativo regolarizzante.

Riassumendo ...

Caratteristiche Multigrid Regolarizzante

- E' un Framework generale che può essere utilizzato per potenziare le proprietà regolarizzanti di un qualsiasi metodo iterativo regolarizzante.
- Rispetto al metodo iterativo utilizzato come smoother l'errore relativo è minore e la curva dell'errore più piatta.

Riassumendo ...

Caratteristiche Multigrid Regolarizzante

- E' un Framework generale che può essere utilizzato per potenziare le proprietà regolarizzanti di un qualsiasi metodo iterativo regolarizzante.
- Rispetto al metodo iterativo utilizzato come smoother l'errore relativo è minore e la curva dell'errore più piatta.
- Solitamente permette di ottenere un'ottima ricostruzione senza ricorrere alle equazioni normali (magari potenziando leggermente il proiettore).

Riassumendo ...

Caratteristiche Multigrid Regolarizzante

- E' un Framework generale che può essere utilizzato per potenziare le proprietà regolarizzanti di un qualsiasi metodo iterativo regolarizzante.
- Rispetto al metodo iterativo utilizzato come smoother l'errore relativo è minore e la curva dell'errore più piatta.
- Solitamente permette di ottenere un'ottima ricostruzione senza ricorrere alle equazioni normali (magari potenziando leggermente il proiettore).
- Può essere combinato con varie tecniche come ad esempio con il vincolo di non negatività.

Lavoro futuro

Teorico

- Dimostrazione della proprietà di regolarizzazione.

Lavoro futuro

Teorico

- Dimostrazione della proprietà di regolarizzazione.

Applicativo

- Estensione a tecniche che preservano i contorni dell'immagine (Total Variation, Wavelet, . . .).

Lavoro futuro

Teorico

- Dimostrazione della proprietà di regolarizzazione.

Applicativo

- Estensione a tecniche che preservano i contorni dell'immagine (Total Variation, Wavelet, ...).
- PSF fortemente non simmetrica.

Lavoro futuro

Teorico

- Dimostrazione della proprietà di regolarizzazione.

Applicativo

- Estensione a tecniche che preservano i contorni dell'immagine (Total Variation, Wavelet, ...).
- PSF fortemente non simmetrica.
- Rumore non uniforme (es. Poissoniano).

Lavoro futuro

Teorico

- Dimostrazione della proprietà di regolarizzazione.

Applicativo

- Estensione a tecniche che preservano i contorni dell'immagine (Total Variation, Wavelet, ...).
- PSF fortemente non simmetrica.
- Rumore non uniforme (es. Poissoniano).

Numerico/Simulativo

- Sperimentazione completa al variare delle diverse BCs (Multigrid ad hoc per le Matrici Strutturate risultanti).