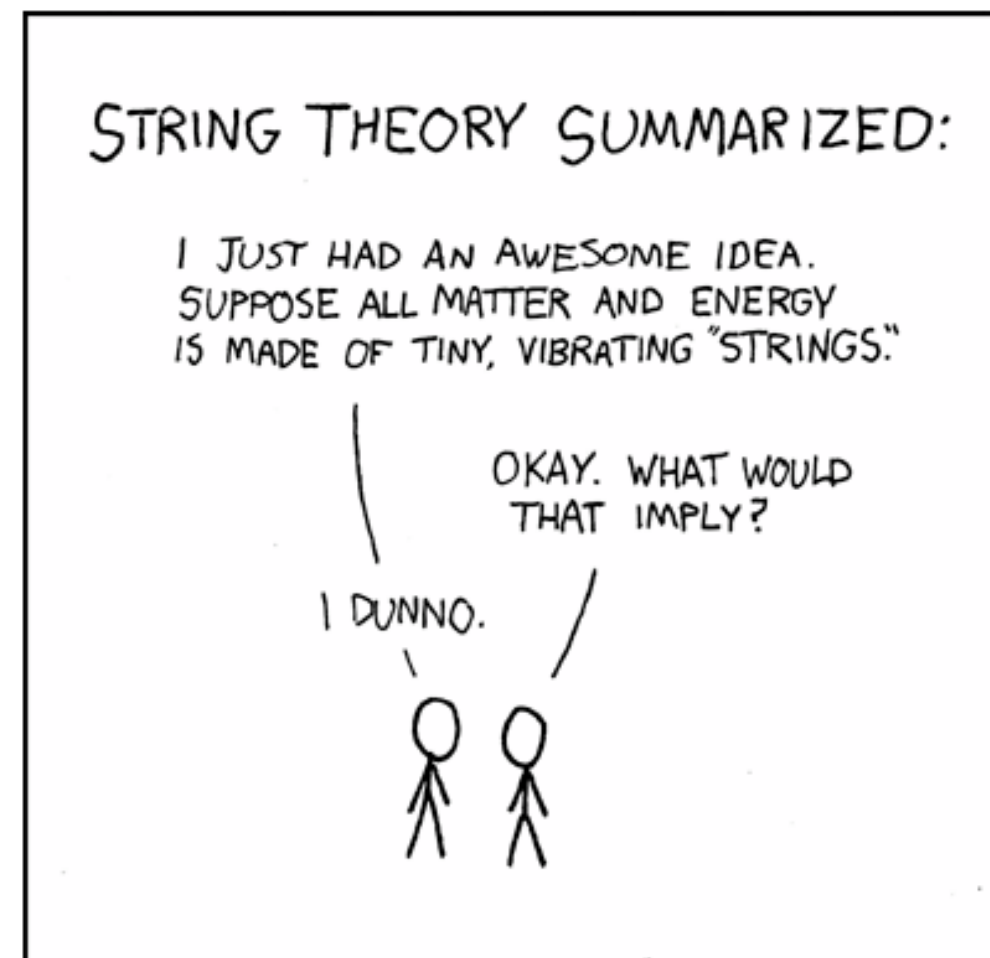


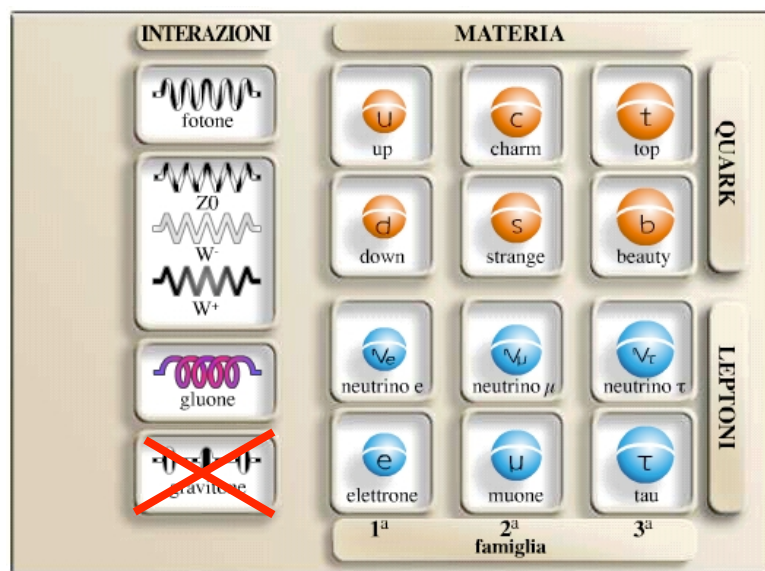
MISURA CHIRALE IN TEORIA DI SUPERSTRINGA

Francesco Dalla Piazza

Università degli Studi dell'Insubria

8 ottobre 2009





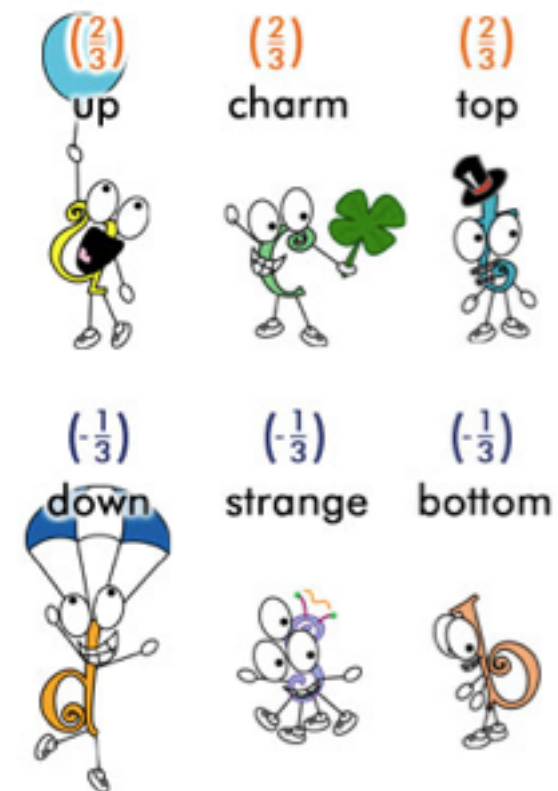
Il Modello Standard

Il Modello Standard è descritto dalla lagrangiana:

$$L_{SM} = L_{gauge_{kin}} + L_{ferm_{kin}} + L_{Higgs} + L_{Yukawa}$$

Aspetti insoddisfacenti da un punto di vista teorico:

- Numerosi parametri liberi.
- Il neutrino ha massa nulla.
- La quantizzazione della carica elettrica non è automatica.
- Non include la gravità.
- Meccanismo per dare massa alle particelle: il bosone di Higgs non è stato osservato.



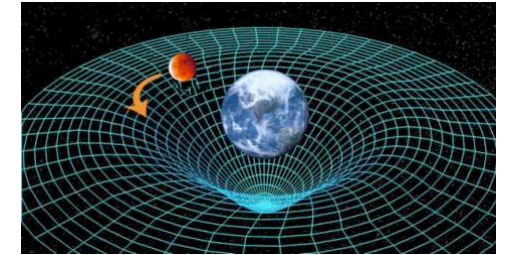
I quark portano anche una carica di colore:



Le costanti fondamentali

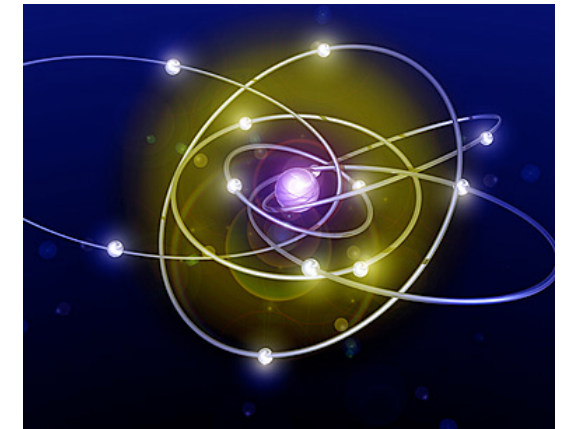
Costante gravitazionale $\longrightarrow$ È una teoria gravitazionale

$$G = 6.7 \times 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$$

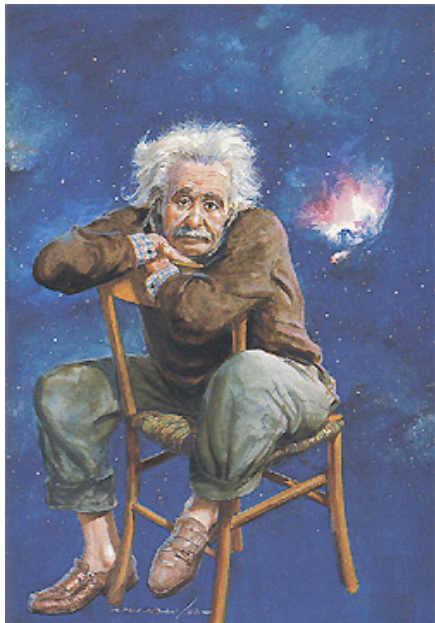


Costante di Planck $\longrightarrow$ È una teoria quantistica

$$\hbar = 1.05 \times 10^{-34} Js (Kgm^2s^{-1})$$



Velocità della luce $\longrightarrow$ È una teoria relativistica



$$c = 2.997 \times 10^8 ms^{-1}$$



La scala di Planck

L'unica combinazione delle costanti fondamentali che ha le dimensioni di una lunghezza è:

$$\left(\frac{G\hbar}{c^3}\right)^{\frac{1}{2}} = 1.6 \times 10^{-35} m$$



Inverto e divido per $\hbar c$



Scala di energia

$$\frac{1.05 \times 10^{-34} Js \times 2.99 \times 10^8 ms^{-1}}{1.6 \times 10^{-35} m}$$

$$= 1.95 \times 10^9 J$$

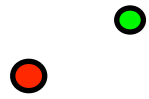
Converto in eV $1 eV = 1.6 \times 10^{-19} J \longrightarrow 1.2 \times 10^{28} eV = 1.2 \times 10^{19} GeV$

La massa di Planck è $\sim 10^{19} GeV/c^2$

Le energie tipiche di unificazione per le GUT sono $10^{15} GeV/c^2$ quindi non includono la gravità

Idea alla base della teoria delle stringhe

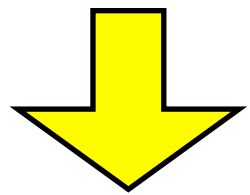
Particelle elementari
puntiformi



Stringa chiusa



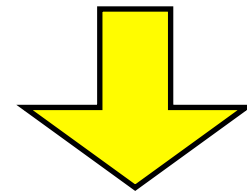
Stringa aperta



Condizioni al
contorno

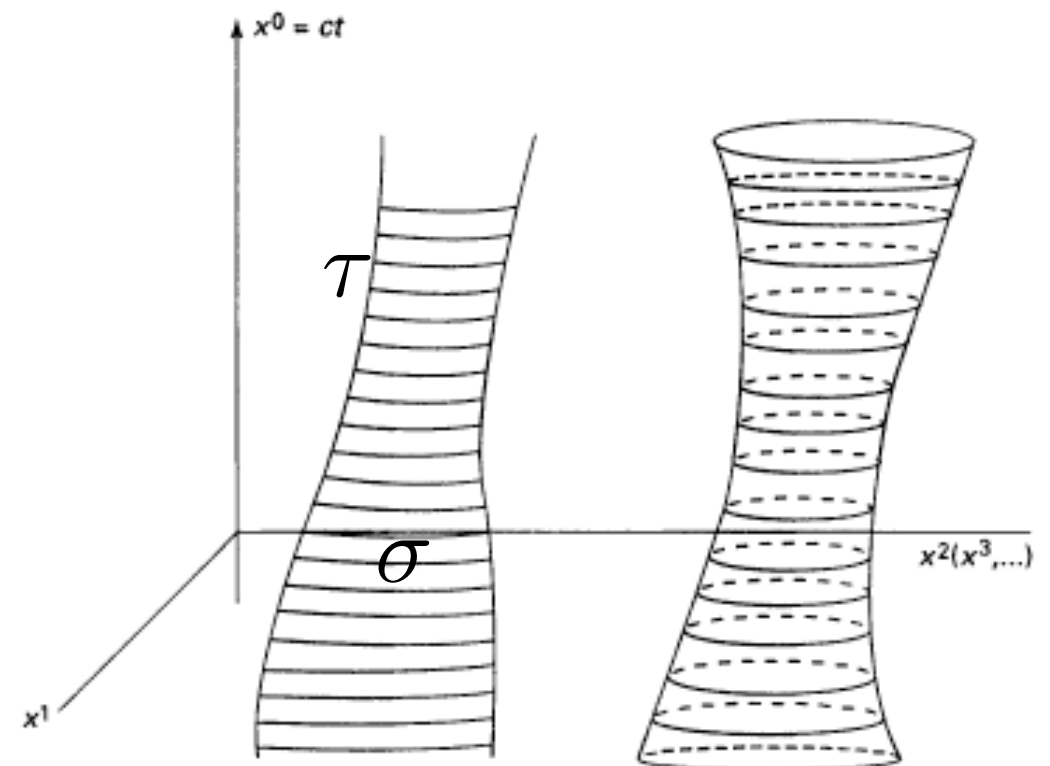
Lunghezza della linea di universo

$$S = k \int d\tau \sqrt{\frac{dX^\mu(\tau)}{d\tau} \frac{dX_\mu(\tau)}{d\tau}}$$



Area del
“world sheet”

$$S = k \int d\tau d\sigma \sqrt{\det \partial_a X^\mu \partial_b X_\mu}$$



Dalla stringa bosonica alla stringa supersimmetrica

Stringhe aperte e chiuse

La teoria è consistente in uno spazio-tempo 26-dimensionale

Nello spettro ci sono particelle con massa e spin crescente

Stato a massa nulla e spin 2

Lo stato fondamentale è un tachione

Nello spettro non sono presenti i fermioni



Superstringa

Aggiungiamo dei campi spinoriali e richiediamo che la teoria sia supersimmetrica

Nello spettro sono presenti stati fermionici
La teoria è consistente in uno spazio-tempo 10 dimensionale

L'azione di Polyakov e le sue simmetrie

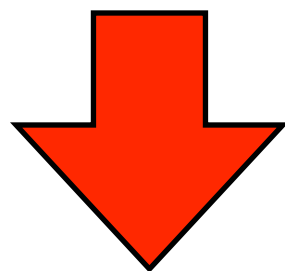
$$S_g = -\frac{T}{2} \int_{\Sigma_g} d^2\sigma \sqrt{h} h^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \eta_{\mu\nu}$$

Simmetrie globali

- Invarianza di Poincaré

Simmetrie locali

- Invarianza per riparametrizzazione
- Riscalamenti di Weyl



Gauge conforme

$$S_g = -\frac{T}{2} \int_{\Sigma_g} d^2\sigma \eta^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X_\mu$$

Equazioni del moto e condizioni al contorno

Dall'azione di Polyakov otteniamo:

$$(\partial_\tau^2 - \partial_\sigma^2)X^\mu = 0 \quad + \text{vincoli}$$

Condizioni al contorno:

Stringa chiusa

$$X^\mu(\sigma + 2\pi) = X^\mu(\sigma)$$

Stringa aperta (Neumann)

$$X'^\mu|_{\sigma=0,\pi} = 0$$

Stringa aperta (Dirichlet)

Soluzione generale

$$\dot{X}^\mu|_{\sigma=0,\pi} = 0$$

$$X^\mu(\tau, \sigma) = X_L^\mu(\tau + \sigma) + X_R^\mu(\tau - \sigma)$$

$$X_L^\mu(\tau + \sigma) = \frac{x^\mu}{2} + \frac{p^\mu}{4\pi T}(\tau + \sigma) + \frac{i}{\sqrt{4\pi T}} \sum_{k \neq 0} \frac{\alpha_k^\mu}{k} e^{-ik(\tau + \sigma)}$$

$$X_R^\mu(\tau - \sigma) = \frac{x^\mu}{2} + \frac{p^\mu}{4\pi T}(\tau - \sigma) + \frac{i}{\sqrt{4\pi T}} \sum_{k \neq 0} \frac{\bar{\alpha}_k^\mu}{k} e^{-ik(\tau - \sigma)}$$

Quantizzazione nel gauge di cono-luce

Introduciamo le coordinate di cono-luce nello spazio-tempo

$$X^{\pm} = \frac{X^0 \pm X^{D-1}}{\sqrt{2}}$$

Grazie alla residua libertà di riparametrizzazione delle coordinate σ e τ del world sheet si può porre:

$$X^+(\sigma, \tau) = x^+ + p^+ \tau$$

e $X^-(\sigma, \tau)$ può essere espresso solo tramite gli oscillatori α^i , $i=1, \dots, D-2$.

Si impongono le regole di commutazione canoniche agli oscillatori e gli stati vengono costruiti tramite successive applicazione degli operatori di creazione allo stato di vuoto.

Gli stati fisici sono quindi automaticamente costruiti usando solo gli oscillatori trasversi.

Nello spettro non sono presenti stati a norma negativa. In una quantizzazione covariante bisogna imporre una condizione “tipo” Gupta-Bleuler.

Pro: nel gauge di cono-luce si ottengono solo gli stati fisici e appartengono ad uno spazio di Hilbert definito positivo.

Contro: gli stati sono multipletti di $SO(D-2)$, ma l'invarianza di Lorentz richiede che gli stati massivi siano multipletti di $SO(D-1)$. Bisogna studiare come i prodotti tensoriali di multipletti di $SO(D-2)$ coincidano con combinazioni di multipletti di $SO(D-1)$.

Spettro della stringa bosonica

Stringhe aperte

- $k=0$: stato **tachionico** $|0, p\rangle$
- $k=1$: **bosone vettore** a massa nulla
 $\alpha_{-1}^i |0, p\rangle$
- $k=2$: $24+24*25/2=324$ stati con massa positiva

$$\alpha_{-2}^i |0, p\rangle \quad \alpha_{-1}^i \alpha_{-1}^j |0, p\rangle$$

Dimensione della rappresentazione tensoriale a traccia nulla di rango 2 di $SO(25)$. Per $k=2$ **singola particella a spin 2**.

Stringhe chiuse

- $k=0$: stato **tachionico** $|0, p\rangle$
- $k=1$: insieme con $24^2=576$ stati
 $|\Omega^{ij}\rangle = \alpha_{-1}^i \tilde{\alpha}_{-1}^j |0, p\rangle$

La parte simmetrica e a traccia nulla trasforma sotto $SO(24)$ come una particella a massa nulla e con spin 2, il **gravitone**.

La parte di traccia è una particella scalare a massa nulla, il **dilatone**.

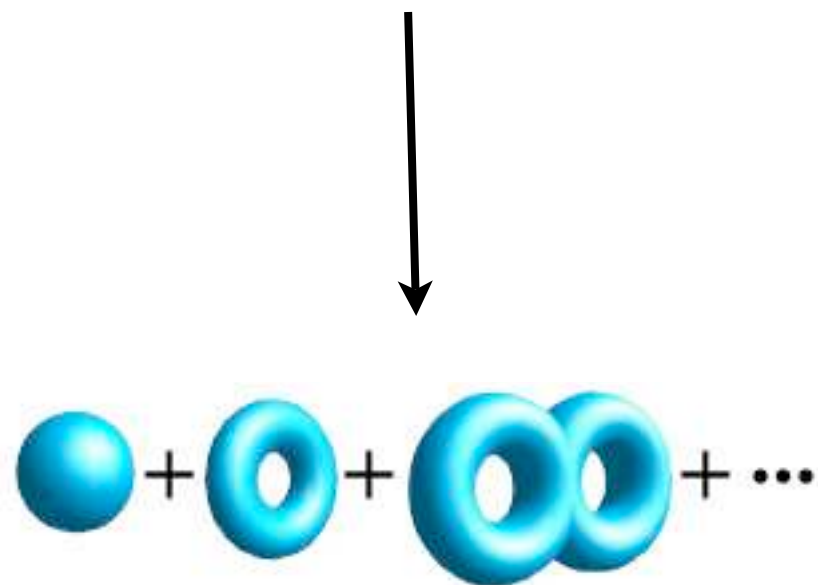
La parte antisimmetrica trasforma come un **tensore antisimmetrico di rango due**.

Formulazione attraverso l'integrale di cammino

Funzione di partizione o ampiezza di vuoto:

$$Z = \sum_g \int_{\Sigma_g} [Dh_{ab}] [DX] \exp(-S_g(X, h))$$

Sfruttando le simmetrie della teoria l'integrale può essere ridotto ad un integrale sullo spazio dei moduli della superficie di Riemann Σ_g .

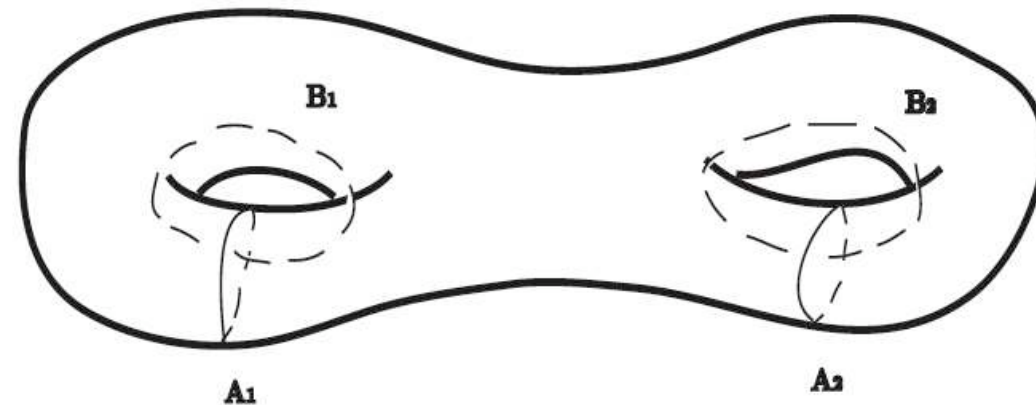


Superstringhe

Accanto ai campi bosonici introduciamo dei campi fermionici

$$S_{g,\delta} = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{\Sigma_g} d^2z \sqrt{h} \left[\frac{1}{2} h^{\alpha\beta} \partial_\alpha x^\mu \partial_\beta x_\mu - \frac{i}{2} \psi^\mu \gamma^\alpha D_\alpha \psi_\mu - \frac{1}{2} \psi^\mu \gamma^a \gamma^\alpha \chi_a \partial_\alpha x_\mu + \frac{1}{8} \psi^\mu \gamma^a \gamma^b \chi_a (\chi_b \psi_\mu) \right]$$

La definizione di uno spinore su una superficie di Riemann non è unica: ci sono 2^{2g} scelte per le condizioni al contorno nel trasportare uno spinore lungo i cicli dell'omologia



Per ogni fissata struttura di spin si definisce la funzione di partizione:

$$Z_{g,\delta} = \int_{\Sigma_g} [Dh_{\alpha\beta}] [D\chi_a] [Dx^\mu] [D\psi^\mu] \exp(-S_{g,\delta}).$$

Passi fondamentali nel calcolo delle ampiezze

- Separazione chirale
- Proiezione GSO
- Definizione della misura chirale di superstringa



Si introduce il formalismo di superspazio



Supersuperfici di Riemann

Ambiguità nel calcolo delle ampiezze dovute alla scelta di un particolare gauge: l'espressione che si trova sviluppando i calcoli attraverso l'integrale di cammino dipende dalla parametrizzazione dei moduli della supersuperficie di Riemann.

Qual'è l'origine?

$$\begin{array}{ccc} (h_{mn}, \chi_m^\alpha) & \sim & (h_{mn} + \delta h_{mn}, \chi_m^\alpha + \delta \chi_m^\alpha) \\ \downarrow & & \downarrow \\ h_{mn} & \approx & h_{mn} + \delta h_{mn} \end{array}$$

Congettura di D'Hoker e Phong

Idea:

sostituire la metrica con la
matrice dei periodi associata alla
superficie di Riemann

Nel caso
supersimmetrico $\rightarrow$

**Super matrice
dei periodi**

Per $g=2$ ottengono:

$$Z_2 = \int_{\mathcal{M}_2} (\det \operatorname{Im} \Omega)^{-5} \sum_{\delta \delta'} c_{\delta \delta'} d\mu[\delta](\Omega) \wedge \overline{d\mu[\delta'](\Omega)},$$

Congettura: l'espressione di Z ha la stessa struttura per ogni
genere g

Problema: costruzione esplicita della
misura $d\mu[\delta](\Omega)$

Ansatz per la misura

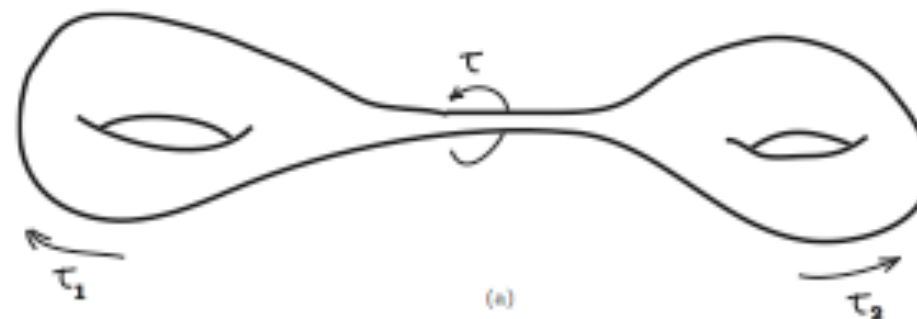
Due strategie possibili:

1. Calcolo diretto: integrazione della parte fermionica dello spazio dei moduli genere per genere.
2. Data la congettura dei D'Hoker e Phong, caratterizzare la misura mediante delle “ragionevoli” proprietà e darne la costruzione esplicita.

$$d\mu[\delta^{(g)}] = c_g \Xi_8[\delta^{(g)}](\Omega^{(g)}) d\mu_B^{(g)}.$$

“Ragionevoli” proprietà per le forme $\Xi_8[\delta^{(g)}](\Omega^{(g)})$:

1. Condizione di regolarità
2. Proprietà di trasformazione
3. Proprietà di fattorizzazione



Risultati

- L'approccio “assiomatico” ci ha permesso di ritrovare la soluzione nota a $g=2$ e provarne l'unicità.
- Costruzione delle misure a $g=3$ e $g=4$.
- Verifica dell'unicità della soluzione a $g=3$ e $g=4$.
- Verifica che l'ampiezza di vuoto

$$\mathcal{Z} = \int_{\mathcal{M}_g} (\det \operatorname{Im} \tau)^{-5} \sum_{\delta, \delta'} c_{\delta, \delta'} d\mu^{(g)}[\delta](\Omega) \wedge \overline{d\mu^{(g)}[\delta'](\Omega)}$$

sia nulla, come ci si aspetta in una teoria supersimmetrica.

- A $g=3$ è stato mostrato che le funzioni a 2 punti si annullano

...in dettaglio $g=3$

Imposti i vincoli di **regolarità**, **trasformazione** e **fattorizzazione** abbiamo ottenuto esplicitamente un'espressione per le forme Ξ_8 :

$$\Xi_8 \begin{bmatrix} 000 \\ 000 \end{bmatrix} := \left(-4\theta \begin{bmatrix} 000 \\ 000 \end{bmatrix}^{16} - 4\theta \begin{bmatrix} 000 \\ 000 \end{bmatrix}^4 \sum_{\delta} \theta[\delta]^{12} + 3\theta \begin{bmatrix} 000 \\ 000 \end{bmatrix}^8 \sum_{\delta} \theta[\delta]^8 + 12G \begin{bmatrix} 000 \\ 000 \end{bmatrix} \right) / 12$$

dove

$$G \begin{bmatrix} 000 \\ 000 \end{bmatrix} = \theta \begin{bmatrix} 000 \\ 000 \end{bmatrix}^2 \theta \begin{bmatrix} 000 \\ 001 \end{bmatrix}^2 \theta \begin{bmatrix} 000 \\ 010 \end{bmatrix}^2 \theta \begin{bmatrix} 000 \\ 011 \end{bmatrix}^2 \theta \begin{bmatrix} 000 \\ 100 \end{bmatrix}^2 \theta \begin{bmatrix} 000 \\ 101 \end{bmatrix}^2 \theta \begin{bmatrix} 000 \\ 110 \end{bmatrix}^2 \theta \begin{bmatrix} 000 \\ 111 \end{bmatrix}^2 + \dots$$

e le funzioni theta sono definite da $\theta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}(\tau) := \sum_{m \in \mathbb{Z}^g} e^{\pi i ({}^t(m+a/2)\tau(m+a/2) + {}^t(m+a/2)b)}$

Schema del procedimento seguito nella costruzione:

- La condizione di trasformazione implica che la forma $\Xi_8[0]$ appartenga ad una particolare rappresentazione di un certo sottogruppo finito del gruppo simplettico.
- Si costruisce una base di tale spazio.
- La condizione di fattorizzazione permette di individuare (in maniera univoca, a meno di una costante moltiplicativa) il vettore Ξ_8 nello spazio che supporta la rappresentazione.
- Iterando la fattorizzazione fino a $g=1$ si deve riconoscere la nota espressione per l'ampiezza. Così viene fissata la costante moltiplicativa.
- Agendo con il gruppo simplettico si ottengono le forme $\Xi_8[\delta]$ per ogni struttura di spin δ .

Perplessità riguardo la congettura di D'Hoker e Phong

- Da $g=5$ in poi non è chiaro se l'ansatz fornisce una soluzione univoca
- A $g=5$ l'ampiezza non si annulla in modo automatico
- Non è chiaro se le funzioni a tre punti si annullano per $g \geq 3$

La procedura seguita da D'Hoker e Phong è valida a $g=2$, ma non è chiaro se possa essere estesa a genere superiore!

Bibliografia

- S. L. Cacciatori, F. Dalla Piazza, *Two loop superstring amplitudes and S_6 representation*, Lett. Math Phys. 83 (2008) 127-138; arXiv:0707:0646.
- S.L. Cacciatori, F. Dalla Piazza and B. van Geemen, *Modular forms and three loop superstring amplitudes*, Nucl. Phys. B 800 (2008) 565-590; arXiv:0801.2543.
- S. L. Cacciatori, F. Dalla Piazza and B. van Geemen, *Genus four superstring measures*, Lett. Math. Phys. 85 (2008) 185-193; arXiv:0804.0457.
- F. Dalla Piazza and B. van Geemen, *Siegel modular forms and finite symplectic groups*, submitted to Advances in Theoretical and Mathematical Physics; arXiv:0804.3769.
- F. Dalla Piazza, *More on superstring chiral measures*, submitted to Nuclear Physics B; arXiv:0809.0854.
- F. Dalla Piazza, *Construction of chiral superstring measure*, proceeding of the XVIII SIGRAV Conference, Cosenza (Italy), September 22-25, 2009; arXiv:0909.2118.
- S. L. Cacciatori and F. Dalla Piazza, *Modular forms and superstrings amplitudes*, contribution to the book *Superstring Theory*, Nova ed. (2010).