

Cognome e Nome: _____

Matricola: _____

Data: _____

Algebra I

Risolvere coll'ausilio di GAP

1. Sia \mathbb{F}_3 il campo con 3 elementi.
 - (a) Dimostrare che $F = \{a + \iota b\}$, ove $a, b \in \mathbb{F}_3$ e $\iota^2 = -1$, è un campo e determinare $|F|$;
Basta osservare che il polinomio $m(x) = x^2 + 1$, di cui ι è radice, è irriducibile su \mathbb{F}_3 e che F è isomorfo a $\mathbb{F}_3[x]/I$ via $\psi : a + \iota b \mapsto a + bx + I$, ove I è l'ideale $\langle m(x) \rangle$. Inoltre essendo $\deg(m) = 1$, $|F| = 3^{\deg(m)+1} = 9$.
 - (b) determinare gli elementi di F fissati dall'automorfismo di Frobenius $\phi : x \mapsto x^3$;
Siccome $(a + \iota b)^3 = a - \iota b$, un elemento di F è fissato da ϕ sse $b = 0$.
 - (c) calcolare il numero dei 13-sottogruppi di Sylow del gruppo moltiplicativo G di F .
Siccome 13^0 è la massima potenza di 13 che divide $|G|$, $n_{13}(G) = 1$, e l'unico 13-sottogruppo di Sylow è ridotto all'identità.
2. Sia $V(a_1, \dots, a_n)$ la matrice $n \times n$ il cui elemento in posizione (i, j) vale a_j^{i-1} , $1 \leq i, j \leq n$ (V viene detta matrice di **Vandermonde**).
 - (a) Scrivere esplicitamente la matrice $V = V(1, 2, 3)$;

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

- (b) sia $L_k(x) = \sum_{i=1}^3 \ell_{ki} x^{i-1}$ il k -simo polinomio di Lagrange associato alla terna $(1, 2, 3)$ e L la matrice la cui k -sima riga è $(\ell_{k1}, \ell_{k2}, \ell_{k3})$.
Mostrare che $LV = I$;
L'elemento in posizione (i, j) in LV coincide con $L_i(a_j)$, ove $(a_1, a_2, a_3) = (1, 2, 3)$. Per definizione di polinomi di Lagrange, questo valore è uguale al delta di Kronecker δ_{ij} che a sua volta è l'elemento in posizione (i, j) della matrice identica. Per cui $LV = I$.
- (c) calcolare esplicitamente la matrice inversa di V ;
 $V^{-1} = L$, quindi devo calcolare i polinomi di Lagrange relativi a $(1, 2, 3)$. Ora $L_1(x) = \frac{1}{2}(x-2)(x-3) = 3 - \frac{5}{2}x + \frac{1}{2}x^2$, quindi la

prima riga di L vale $(3, -\frac{5}{2}, \frac{1}{2})$. Procedendo analogamente per le altre righe si ottiene:

$$L = \begin{pmatrix} 3 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ -3 & 4 & -1 \\ 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

3. Determinare gli zeri del polinomio $f(x) = x^2 - 75 \in \mathbb{Q}_5[x]$.

Sia $a = 5b$, allora $f(a) = 0$ sse $b^2 - 3 = 0$. Quindi b è zero del polinomio $g(y) = y^2 - 3$. Il polinomio g soddisfa le condizioni del Lemma di Newton-Hensel, quindi i suoi zeri si ottengono a partire dalle soluzioni di $y^2 \equiv_5 3$. Siccome tale congruenza non ammette soluzioni. NON esistono zeri del polinomio f in $\mathbb{Q}_5[x]$.