Lista Esami di Algebra

1. Dato un primo p, sia $[a]_p$ la classe di resto modulo p contente a.

   (a) Mostrare che $\pi_p(a_{ij}) = ([a_{ij}]_p)$, $i, j = 1, 2, 3$ definisce un omomorfismo dall'anello delle matrici 3×3 su $\mathbb{Z}$ all'anello delle matrici 3×3 su $\mathbb{Z}_p$.

   (b) Sia
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$
   una matrice a coefficienti in $\mathbb{Z}$. Determinare $\det \pi_2(A)$ e $\det \pi_3(A)$.

   (c) Trovare $\det \pi_p(A)$, per ogni primo p.

2. Sia $f(z) = \frac{z^2}{1-2z}$.

   (a) Definire la funzione generatrice associata ad una successione.

   (b) Determinare la successione (a_i) la cui funzione generatrice associata è f.

   (c) Calcolare $f(z) + f(-z)$. Che informazioni sugli a_i ricavate da tale calcolo?

3. (a) Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{Z}$, $n^4 - n^2$ è divisibile per 12.

   (b) Dimostrare che $\forall n \geq 0$, 35 divide $6^{n^4-n^2} - 1$.

4. (a) Si dia la definizione di semigruppo.

   (b) Nell'insieme $M = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ si consideri l'operazione
   $$(a, b) * (c, d) = (ac, bc + d).$$
   Si verifichi se $(M, *)$ è un monoide.

5. Siano A e B sottoinsiemi di $\mathbb{Z}$ così definiti
   $$A = \{6x + 8y \,:\, x, y \in \mathbb{Z}\}, \quad B = \{8y \,:\, y \in \mathbb{Z}\}$$

   (a) Si dimostri che $(A, +)$ è un gruppo.

   (b) Si dica se A è sottogruppo di B o se B è sottogruppo di A.

6. (a) Determinare il massimo comune divisore tra 1812 e 724.
   (b) Risolvere $1812x + 724y = 12$ con $x, y \in \mathbb{Z}$.

7. Dati i polinomi $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 2x + 3$ e $g(x) = x^2 - x$ in $\mathbb{Z}_n[x]$, determinare per quali valori di n, M.C.D.$(f, g) = 1$.

8. Dato un primo p, si ponga $m = \frac{p^p-1}{p-1}$.
   (a) Dimostrare che M.C.D.$(m, p-1) = 1$ (si ponga $v = p - 1$, quindi $p = v + 1$).
   (b) Sia q un divisore primo di m. Mostrare che l'ordine di p in $\mathbb{Z}_q^*$ è p.
   (c) Concludere che ogni divisore di m è congruo a 1 modulo p (usare il Teorema di Eulero-Fermat).

9. Siano date le relazioni $R : Y \not\longrightarrow Z$ e $S, T : X \not\longrightarrow Y$.
   (a) Provare che $R(S \cap T) \subseteq RS \cap RT$.
   (b) Mostrare con un controesempio che non vale l'inclusione opposta (scegli R, S, T di cardinalitá $2, 1, 1$).

10. (a) Si dimostri che tutti gli ideali di $\mathbb{Z}$ sono della forma $n\mathbb{Z}$ per qualche intero n.
    (b) Determinare tutti gli anelli che risultano essere immagini epimorfe di $\mathbb{Z}$.

11. Determinare il numero e la struttura dei 3-sottogruppi di Sylow di A_4, il gruppo alterno su 4 lettere.

12. (a) Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{Z}$, $n^4 - n^2$ è divisibile per 12.
    (b) Dimostrare che $\forall n \geq 0$, 35 divide $6^{n^4-n^2} - 1$.

13. (a) Si dia la definizione di semigruppo.
    (b) Nell'insieme $M = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ si consideri l'operazione

$$(a, b) * (c, d) = (ac, bc + d).$$

    Si verifichi se $(M, *)$ è un monoide.

14. Siano A e B sottoinsiemi di $\mathbb{Z}$ così definiti

$$A = \{6x + 8y \,:\, x, y \in \mathbb{Z}\}, \quad B = \{8y \,:\, y \in \mathbb{Z}\}$$

   (a) Si dimostri che $(A, +)$ è un gruppo.

   (b) Si dica se A è sottogruppo di B o se B è sottogruppo di A.

15. (a) Determinare il massimo comune divisore tra 1812 e 724.

   (b) Risolvere $1812x + 724y = 12$ con $x, y \in \mathbb{Z}$.

16. Dati i polinomi $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 2x + 3$ e $g(x) = x^2 - x$ in $\mathbb{Z}_n[x]$, determinare per quali valori di n, M.C.D.$(f, g) = 1$.

17. Sia $\mathbb{Z}_p[x]$ l'anello dei polinomi a coefficienti sull'anello delle classi di resto modulo p, p primo; si consideri $f(x) = x^6 + x^5 + 3x^4 + 3x^3 + 2x + 2 \in \mathbb{Z}_p[x]$.

   (a) Determinare i valori di p per cui f ammette 1 come radice.

   (b) Determinare i valori di p per cui f ammette -1 come radice.

   (c) Detti r e q resto e quoziente nell'algoritmo euclideo di f rispetto a $x^2 - 1$, determinare i valori di p per cui $r = 0$ e q è un polinomio irriducibile in $\mathbb{Z}_p[x]$.

18. Sia $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ il gruppo delle matrici invertibili di ordine 2 sul campo dei complessi. Dato $a = a_0 + ia_1 \in \mathbb{C}$, si indichi con $\bar{a} = a_0 - ia_1$ il coniugato di a, ove a_0, a_1 sono numeri reali.

   (a) Provare che $H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{C}, \langle a, b \rangle \neq \langle 0, 0 \rangle \right\}$ è un sottogruppo di G.

   (b) Mostrare che il determinante di ogni elemento di H è un numero reale positivo.

   (c) Stabilire per quali valori di $r \in \mathbb{R}$, $H_r = \{h \in H \mid \det(h) = r\}$ è un sottogruppo di H.

19. Sia il gruppo G prodotto di due suoi sottogruppi A e B (ossia $G = \{ab \mid a \in A, \quad b \in B\}$). Si definisca la relazione R di A in sé come segue: $aRa' \iff \exists b, b' \in B$ tali che $ab = b'a'$.

(a) Provare che R definisce una relazione di equivalenza su A.

(b) Descrivere gli elementi della classe di equivalenza contenente 1.

(c) Sia $G = S_3$ il gruppo simmetrico su 3 oggetti, si dimostri che $G = AB$, ove A è un 2-sottogruppo di Sylow e B un 3-sottogruppo di Sylow di G e si determinino le classi di equivalenza dei vari elementi di A.

20. Sia X un insieme finito e sia f un'endofunzione iniettiva di X. Si definisca ricorsivamente $f^1 = f$ e $f^m = f \circ f^{m-1}$, l'iterata m-sima rispetto alla composizione di f.

    (a) Dato $x \in X$, mostrare che esiste un intero positivo $m = m(x)$, tale che $f^m(x) = x$ (si consideri l'insieme delle immagini di x mediante le iterate di f).

    (b) Mostrare che esiste un intero positivo u tale che $f^u(x) = x$ per ogni $x \in X$ (si consideri il minimo comune multiplo degli interi $m(x)$ al variare di $x \in X$).

    (c) Provare che f è invertibile e che l'inversa coincide con un'opportuna iterata di f.

21. Siano a e b interi tali che M.C.D$(a, b) = 1$. Dato un intero c, sia x il prodotto di tutti i primi che dividono c ma non dividono a se M.C.D.$(a, c) \neq 1$, $x = 0$ altrimenti.

    (a) Provare che ogni divisore primo di c non divide $a + bx$.

    (b) Mostrare che M.C.D.$(a + bx, c) = 1$.

    (c) Determinare il minimo valore di y tale che M.C.D.$(6+7*y, 15) = 1$.

22. Un automorfismo α di un gruppo finito G dicesi **privo di punti fissi** se $\alpha(g) = g$ implica $g = 1$. Sia α un automorfismo di G privo di punti fissi di ordine 2.

    (a) Dimostrare che $f \in$End(G) definita da $f(g) = g^{-1}\alpha(g)$ è iniettiva.

    (b) Dimostrare che f è suriettiva e dedurne che $\alpha(g) = g^{-1}$.

    (c) Provare che G è abeliano.

23. Nel gruppo totale delle permutazioni su 5 oggetti S_5, sia data la permutazione

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Si determini un'altra permutazione $G \neq 1, F$ tale che $F \cdot G = G \cdot F$.

(b) Si scrivano F e G come prodotto di cicli disgiunti.

24. (a) Determinare la funzione generatrice associata a $\binom{n}{k}$, dove n è fissato.

(b) Dimostrare la formula di convoluzione di Vandermonde

$$\sum_{k=0}^{r} \binom{n}{k}\binom{m}{r-k} = \binom{n+m}{r}.$$

25. Nell'anello $\mathbb{Z}[x]$ si consideri l'ideale I generato da 3 e da x.

(a) Si mostri che I non è principale

(b) Descrivere in modo esplicito gli elementi di I e provare che $1 + xf(x) \notin I$ per ogni polinomio f.

26. Sia G il gruppo delle trasformazioni rigide di un quadrato in sé.

(a) Provare che G contiene un elemento a di ordine 4 e un elemento b di ordine 2 che non è una potenza di a.

(b) Mostrare che $|G| = 8$.

(c) Determinare i sottogruppi normali di G.

27. Sia A il sottoinsieme dei numeri reali della forma $\{a + b\sqrt{3} \,:\, a, b \in \mathbb{Z}\}$.

(a) Provare che A è un anello rispetto alle consuete operazioni di somma e prodotto sui reali.

(b) Sia I l'ideale generato da 3 in A e $Q = A/I$ il relativo anello quoziente. Mostrare che $|Q| = 9$.

(c) Determinare gli elementi nilpotenti di Q.

28. Si consideri la relazione $aRb \iff \exists n \in \mathbb{Z}$ tale che $a = 2^n b$ definita sugli interi.

(a) Provare che R definisce una relazione di equivalenza su $\mathbb{Z}$.

(b) Descrivere gli elementi della classe di equivalenza contenente 1.

29. Nel gruppo totale delle permutazioni su 6 oggetti $G = \mathrm{S}_6$, sia data la permutazione $g = (1,2)(3,4,5,6)$.

    (a) Si determini $C_G(g) = \{x \in G \,:\, xg = gx\}$.

    (b) Provare che $C_G(g)$ è un sottogruppo di G.

    (c) Trovare l'ordine della classe di coniugio di g in G.

30. (a) Dimostrare che $x^{md} - 1 = (x^d - 1) \sum_{i=0}^{m-1} x^{di}$.

    (b) Se d è un intero dispari provare che $x^{md}+1 = (x^d+1) \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i x^{di}$.

    (c) Dato un intero n, provare che $2^n + 1$ è primo solo se n è una potenza di 2.