1. Sia $V = \mathbb{R}^4$.
   (a) Dimostrare che $f(v) = \sqrt{2}v$, definisce un endomorfismo di V.
   (b) Ha senso parlare della matrice associata ad f? In tal caso determinarla.

2. Sia A una matrice 3×3 a coefficienti in $\mathbb{Z}_7$, avente autovalori $1, 2, 3$.
   (a) Esibire almeno due matrici simili ad A.
   (b) Calcolare la traccia e il determinante di A.

3. Sia $V = \mathbb{Q}[x]$ lo spazio dei polinomi a coefficienti razionali.
   (a) Mostrare che il sottoinsieme S dei polinomi di grado minore o uguale a 2 è un sottospazio di V.
   (b) Provare che $\{2, (x+1), (x+1)^2\}$ è una base per S.

4. Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale V, tale che $f^3 = f$.
   (a) Mostrare gli autovalori di f appartengono a $\{\pm 1, 0\}$.
   (b) Esibire un tale f con autovalori ± 1 soltanto.

5. Risolvere il seguente sistema lineare al variare del parametro $\lambda \in \mathbb{Z}_7$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = 2 \\ 2x_1 - 2x_2 - \lambda x_3 = 3. \end{cases}$$

6. Calcolare i minori principali di

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 7 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

   al variare di a in $\mathbb{C}$.

7. Determinare autovettori e autovalori della matrice $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

8. Sia $a = 201338$ e $b = 413362$ e si indichi con $[c]_7$ la classe dell'intero c modulo 7.
   (a) Calcolare $[ab]_7$
   (b) Sotto quali condizioni su $c \in \mathbb{Z}_7$ esiste $[a/c]_7$?
   (c) Calcolare $[a^6]_7$.
9. Sia $f(z) = \frac{z^2}{1-2z}$.
   (a) Definire la funzione generatrice associata ad una successione.
   (b) Determinare la successione (a_i) la cui funzione generatrice associata è f.
   (c) Calcolare $f(z)+f(-z)$. Che informazioni sugli a_i ricavate da tale calcolo?
10. Nell'anello $\mathbb{Z}[x]$ si consideri l'ideale I generato da 3 e da x.
   (a) Si mostri che I non è principale
   (b) Descrivere in modo esplicito gli elementi di I e provare che $1 + xf(x) \notin I$ per ogni polinomio f.
11. Sia f l'applicazione da $\mathbb{R}^5$ in $\mathbb{R}^3$ definita mediante $f(a, b, c, d, e) = (a - b, c, d - e)$.
   (a) Mostrare che f è lineare.
   (b) Stabilire per quali valori di a e d $(a, a, 0, d, d) \in \ker f$.
   (c) Determinare i vettori v tali che $f(v) = (1, 3, 2)$.
12. Sia $a = 21338$ e $b = 142362$ e si indichi con $[c]_{11}$ la classe dell'intero c modulo 11.
   (a) Calcolare $[ab]_{11}$.
   (b) Calcolare $[a^{10}]_{11}$.
   (c) Sotto quali condizioni su $c \in \mathbb{Z}$ è risolvibile $cx \equiv a \pmod{11}$?
13. Sia f l'applicazione da $\mathbb{R}^5$ in $\mathbb{R}^3$ definita mediante

$$f(a, b, c, d, e) = (5a + b - c, 2c - d, d - e).$$

(a) Mostrare che f è lineare.

(b) Stabilire per quali valori di a e d, $(a, a, 2, d, d) \in \ker f$.

(c) Determinare i vettori v tali che $f(v) = (1, 3, 2)$.

14. Sia $A = \{a + b\sqrt{-5} \,|\, a, b \in \mathbb{Z}\}$.

    (a) Dimostrare che A è un anello commutativo dotato di unità.

    (b) Sia $N : A \to \mathbb{Z}$, definita da $N(a + b\sqrt{-5}) = a^2 + 5b^2$. Si mostri che $N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta)$, per ogni α, β in A.

    (c) Determinare l'insieme $\{u \in A \,|\, N(u) = 1\}$ e mostrare che coincide cogli elementi invertibili di A.

15. Sia $V = \mathbb{R}^4$.

    (a) Dimostrare che $f(v) = \sqrt{2}\, v$, definisce un endomorfismo di V.

    (b) Ha senso parlare della matrice associata ad f? In tal caso determinarla.

16. Sia A una matrice 3×3 a coefficienti in $\mathbb{Z}_7$, avente autovalori $1, 2, 3$.

    (a) Esibire almeno due matrici simili ad A.

    (b) Calcolare la traccia e il determinante di A.

17. Sia $V = \mathbb{Q}[x]$ lo spazio dei polinomi a coefficienti razionali.

    (a) Mostrare che il sottoinsieme S dei polinomi di grado minore o uguale a 2 è un sottospazio di V.

    (b) Provare che $\{2, (x + 1), (x + 1)^2\}$ è una base per S.

18. Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale V, tale che $f^3 = f$.

    (a) Mostrare gli autovalori di f appartengono a $\{\pm 1, 0\}$.

    (b) Esibire un tale f con autovalori ± 1 soltanto.

19. Determinare tutti e soli i polinomi $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ tali che $f(0) = 1$, $f(-2) = 0$ e $f(1) = \frac{1}{2}$.

20. Sia $f(x, y, z) = (x + y, -x + z, 2x + y - z)$, $x, y, z \in \mathbb{Z}_5$. Mostrare che f è lineare e calcolarne la matrice associata rispetto alla base $\{(1, 1, 0), (0, -1, 1), (0, 2, 1)\}$.

21. Dati i sottospazi $U = \{(x, x, 2x + y, x - y)\}$ e $W = \{(x + y, y, -x + z, y + z)\}$ di $\mathbb{R}^4$ determinare una base di $U \cap W$ e di $U + W$.

22. Assumendo che $\sum_{i=1}^{n} i^2$ sia esprimibile mediante un polinomio f di grado 3 in n:

    (a) Determinare f valutando la precedente somma per alcuni valori di n.

    (b) Dimostrare per induzione la correttezza del precedente risultato.

23. Sia $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ ed $R = \{x + yA \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$.

    (a) Si dimostri che R è un sottocampo dell'anello delle matrici 2 per 2 a coefficienti razionali.

    (b) In particolare determinare esplicitamente l'inverso della matrice $x + yA$.

24. Sia f l'endofunzione di $\mathbb{N}$ definita da $f(a) = b$, se $a = 2b$, $3a + 1$ altrimenti.

    (a) Stabilire se f è iniettiva, suriettiva o biunivoca.

    (b) Calcolare la successione $\{f^i(5) \mid i = 1, 2, \ldots\}$, ove f^i indica l'iterata i-sima di f. (Si congettura che per ogni intero n esista i tale che $f^i(n) = 1$.)

25. Sia determini al variare del parametro reale a il rango della seguente matrice

$$M := \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & a & -1 & 2 \\ a & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

26. Dimostrare che esiste una sola applicazione lineare $f \in End(\mathbb{R}^3)$ tale che

    (a) $e_1 + e_3$ è un autovettore di autovalore 1;

    (b) $f(e_1) = 2(e_1 + e_2 + e_3)$;

    (c) $f(e_2 + e_3) = 2e_2$,

dove e_i sono i vettori della base standard, e se ne determini nucleo e immagine.

27. Sia $\mathbb{Z}_p[x]$ l'anello dei polinomi a coefficienti sul campo con p elementi, p primo.

    (a) Si determini per quali valori di p primo, il polinomio $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 2x + 13$ ammette 1 come radice;

    (b) si fattorizzi non banalmente f per tali primi.

28. Sia B la matrice di righe $(-2, 0, 6)$, $(2, 0, -6)$, $(-1, 0, 3)$

    (a) Si dimostri che $B^2 = B$;

    (b) provare che gli autovalori λ di B sono 0 o 1 (usando il punto precedente non e' necessario alcun calcolo);

    (c) mostrare che A è diagonalizzabile

29. Risolvere il seguente sistema lineare al variare del parametro $\lambda \in \mathbb{Z}_7$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = 2 \\ 2x_1 - 2x_2 - \lambda x_3 = 3. \end{cases}$$

30. Calcolare i minori principali di

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 7 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

    al variare di a in $\mathbb{C}$.

31. Determinare autovettori e autovalori della matrice $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

32. Si determini un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che

(a) $\ker f = \langle (1,1,0), (0,1,1) \rangle$;

(b) un autovalore sia uguale a 2 e il relativo autovettore sia $(1,1,1)$;

(c) si determini la matrice associata ad f rispetto alle basi canoniche.

33. Sia $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

    (a) Mostrare che $A^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ per $n \in \mathbb{N}$;

    (b) si provi che $K = \{A^n \, : \, n \in \mathbb{Z}\}$ è un gruppo abeliano rispetto al prodotto righe per colonne;

    (c) stabilire se K è ciclico e, in tal caso, determinarne un generatore.

34. Risolvere il sistema $x - y + az = 0$, $2x - \frac{1}{2}y = 1$, $x + 10y - 11z = 2$ al variare del parametro $a \in \mathbb{Z}_5$.

35. Sia V lo spazio vettoriale delle matrici 2×2 su $\mathbb{Z}_2$:

    (a) stabilire se $U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \, : \, a^2 = b^2 \right\}$ è un sottospazio di V;

    (b) provare che $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \, : \, a = c + d \right\}$ è un sottospazio di V;

    (c) esibire una base per W.

36. Si consideri il polinomio $p(x) = x^7 + 2x^6 + x^5 + x^3 + x^2 + 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$.

    (a) Si mostri che p è divisibile per $a(x) = x^3 + 2x + 1$.

    (b) Si determini una decomposizione di $p(x)$ come prodotto di polinomi irriducibili.

37. Si consideri l'insieme finito standard $[n]$ munito del suo ordine naturale e si indichi con $O(n)$ l'insieme delle endofunzioni non decrescenti di $[n]$.

    (a) Si dimostri che $O(n)$ è un sottomonoide di $\mathrm{End}[n]$.

    (b) Provare che $|O(n)| = \frac{(2n)!}{2(n!)^2}$.

38. Si dimostri per induzione che per ogni $n \geq 1$ vale:

$$\sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}.$$