

Cognome e Nome: \_\_\_\_\_

Matricola: \_\_\_\_\_

Data: \_\_\_\_\_

## Algebra I

1. Determinare tutte le soluzioni di  $x^3 = 2$  in  $\mathbb{Q}_5$ , i numeri 5-adici, ed esprimerle fino alla quarta cifra.
2. Sia  $G$  un gruppo semplice di ordine 168.
  - (a) Mostrare che  $n_7(G)$ , il numero dei 7-sottogruppi di Sylow, è 8 e che, detto  $P$  un tale sottogruppo,  $|N_G(P)| = 21$ .
  - (b) Mostrare che l'insieme  $M$  dei 7-Sylow di  $G$ , diventa un  $G$ -insieme rispetto all'azione  $\pi : (P, g) \mapsto P^g$ .
  - (c) Provare che  $\pi$  realizza un monomorfismo iniettivo da  $G$  in  $S_8$ , il gruppo simmetrico su 8 elementi.
3. Fattorizzare il polinomio  $f(x) = x^5 + x^4 + 2x^2 + 1$  in  $\mathbb{F}_3[x]$ .