

Cognome e Nome: _____

Matricola: _____

Data: _____

Algebra I

Risolvere coll'ausilio di GAP

1. Sia \mathbb{F}_3 il campo con 3 elementi.
 - (a) Dimostrare che $F = \{a + ib\}$, ove $a, b \in \mathbb{F}_3$ e $i^2 = -1$, è un campo e determinare $|F|$;
 - (b) determinare gli elementi di F fissati dall'automorfismo di Frobenius $\phi : x \mapsto x^3$;
 - (c) calcolare il numero dei 13-sottogruppi di Sylow del gruppo moltiplicativo G di F .
2. Sia $V(a_1, \dots, a_n)$ la matrice $n \times n$ il cui elemento in posizione (i, j) vale a_j^{i-1} , $1 \leq i, j \leq n$ (V viene detta matrice di **Vandermonde**).
 - (a) Scrivere esplicitamente la matrice $V = V(1, 2, 3)$;
 - (b) sia $L_k(x) = \sum_{i=1}^3 \ell_{ki} x^{i-1}$ il k -simo polinomio di Lagrange associato alla terna $(1, 2, 3)$ e L la matrice la cui k -sima riga è $(\ell_{k1}, \ell_{k2}, \ell_{k3})$. Mostrare che $LV = I$;
 - (c) calcolare esplicitamente la matrice inversa di V ;
3. Determinare gli zeri del polinomio $f(x) = x^2 + 25 \in \mathbb{Q}_5[x]$ con precisione ad almeno tre cifre.