

Nome e Cognome: _____
Matricola: _____

Algebra I

1. Sia $G = \text{Sym}(4)$ e $N = \text{Alt}(4)$.
 - (a) Dimostrare che N è un sottogruppo normale di G ;
 - (b) Mostrare che $\text{Syl}_3(G) = \text{Syl}_3(N)$;
 - (c) Sia $P \in \text{Syl}_3(G)$ e $H = N_G(P)$. Provare che $|G : H| = 4$;
 - (d) Mostrare che $N_N(P) = H \cap N$ ha cardinalità 3;
 - (e) Mostrare che $L \leq G$ ha cardinalità 6 sse $L = N_G(P)$ per qualche $P \in \text{Syl}_3(G)$;
 - (f) Dedurre che N non ammette sottogruppi di cardinalità 6.

2. Sia $G = \text{GL}_2(\mathbb{3})$.
 - (a) Determinare $|G|$;
 - (b) Sia $S = \text{SL}_2(\mathbb{3})$, provare che $|S| = 24$;
 - (c) Mostrare che $H = \langle \text{diag}(-1, 1) \rangle$ è un sottogruppo ciclico di ordine 2 di G ;
 - (d) Provare che $G = SH$ e $S \cap H = 1$;
 - (e) Provare che $Z(G) = Z(S) = \langle -I \rangle$.