Nome e Cognome: ______________________________
Matricola: _______________

Algebra I

1. Sia $G = C_2 \times Alt_3$.
   (a) Provare che $|G| = 6$;
   (b) Determinare $C_G((a, b))$, ove $C_2 = \langle a \rangle$ e $Alt_3 = \langle b \rangle$;
   (c) Costruire un isomorfismo tra G e $C_6 = \langle c \rangle$.

2. Sia $G = \langle a \,|\, a^{15} = 1 \rangle$ un gruppo ciclico di ordine 15.
   (a) Determinare $b, c \in G$ tali che $G = \langle b \rangle \times \langle c \rangle$ con $o(b) = 3$ e $o(c) = 5$;
   (b) Determinare tutti i $b' \in \langle b \rangle$ e $c' \in \langle c \rangle$ tali che $G = \langle b' \rangle \times \langle c' \rangle$;
   (c) Dedurre che $\phi(15) = \phi(3)\phi(5)$, ove ϕ denota la funzione di Eulero.

3. Sia $G = GL_2(3)$.
   (a) Determinare $|G|$;
   (b) Sia $S = SL_2(3)$, provare che $|S| = 24$;
   (c) Mostrare che $H = \langle diag(-1, 1) \rangle$ è un sottogruppo ciclico di ordine 2 di G;
   (d) Provare che $G = SH$ e $S \cap H = 1$;
   (e) Provare che $Z(G) = Z(S) = \langle -I \rangle$.