

Nome e Cognome: \_\_\_\_\_  
Matricola: \_\_\_\_\_

# Algebra I

1. Sia  $N = C_6$  un gruppo ciclico di ordine 6.
  - (a) Provare che  $\text{Aut}(G) \simeq C_2$ ;
  - (b) Determinare tutti gli endomorfismi di  $C_2$ ;
  - (c) Dimostrare che tutti i prodotti semidiretti tra  $N$  e  $C_2$  sono isomorfi a  $C_6 \times C_2$  o a  $D_{12}$ , il gruppo diedrale di ordine 12.
  
2. Sia  $G$  un gruppo semplice di ordine 60.
  - (a) Provare che  $n_2(G) = 3, 5$  o  $15$ ;
  - (b) Sia  $T \in \text{Syl}_2(G)$  e  $H = N_G(T)$ , mostrare che  $\text{Core}_G(H) = 1$ ;
  - (c) Provare che se  $n_2(G) = 3$ ,  $G$  sarebbe isomorfo a un sottogruppo di  $\text{Sym}(3)$  e dedurre che  $n_2(G) \neq 3$ ;
  
3. Sia  $G = GL_2(5)$ .
  - (a) Determinare  $|G|$ ;
  - (b) Sia  $S = SL_2(5)$ , provare che  $|G : S| = 4$ ;
  - (c) Mostrare che  $H = \langle \text{diag}(2, 1) \rangle$  è un sottogruppo ciclico di ordine 4 di  $G$ ;
  - (d) Provare che  $G = SH$  e  $S \cap H = 1$ ;
  - (e) Provare che  $Z(G) = \langle 2I \rangle$ .