

Nome e Cognome: _____
Matricola: _____

Algebra I

1. Sia $N = C_8$ un gruppo ciclico di ordine 8.
 - (a) Provare che $A := \text{Aut}(G) \simeq C_2 \times C_2$;
 - (b) Determinare almeno un endomorfismo ϕ di A endomorfismi di C_2 ;
 - (c) Costruire il prodotto semidiretto tra N e A via ϕ .
2. Sia $G = A_5$ il gruppo alterno su 5 elementi.
 - (a) Dimostrare che un sottogruppo normale di un gruppo è unione di classi di coniugio.
 - (b) Provare che le classi di coniugio di G hanno cardinalità 1, 12, 12, 15, 20.
 - (c) Provare che le sole cardinalità di unione di classi che pari a un divisore di 60 sono 1 e 60.
 - (d) dedurre che G è semplice.
3. Sia $G = GL_2(3)$.
 - (a) Determinare $|G|$;
 - (b) Sia $S = SL_2(3)$, provare che $|S| = 24$;
 - (c) Calcolare l'ordine di $g = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in G$.