Nome e Cognome: ______________________
Matricola: ______________________
Data: ______________________

Algebra I

1. Il principio di Hankel impone di estendere funzioni in modo da preservare proprietà interessanti delle stesse.

   (a) Dimostrare che $a^n a^m = a^{n+m}$, $\forall a \in \mathbb{Z}$ e $\forall n, m \in \mathbb{N}_{>0}$;

   (b) Provare che la precedente proprietà continua a valere anche per $m = 0, a \neq 0$ sse si definisce $a^0 := 1$;

   (c) Provare, usando le proprietà distributive nell'anello $\mathbb{Z}$, che $a \cdot 0 = 0$ $\forall a \in \mathbb{Z}$;

   (d) Dimostrare per induzione su n che $0^n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}_{>0}$;

   (e) Dimostrare per induzione su m che $(a^n)^m = a^{nm}$, $\forall a \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$, e $\forall n, m \in \mathbb{N}$;

   (f) Posto $b := 0^0$, mostrare che la precedente proprietà continua a valere anche per $a = 0$ sse $b^m = b$, $\forall m \in \mathbb{N}$;

   (g) Dedurre che $b = 0$ o $b = 1$.

2. Sia $\mathbb{P} := \mathbb{N}_{>0}$ e $a * b := a^b$, $\forall a, b \in \mathbb{P}$.

   (a) Dimostrare che $*$ definisce un'operazione binaria su $\mathbb{P}$;

   (b) Provare che $*$ non è associativa;

   (c) Mostrare che 1 è un elemento neutro a destra, ossia $a * 1 = a$, $\forall a \in \mathbb{P}$;

   (d) Fornire la definizione di elemento neutro a sinistra e mostrare che 1 non è un elemento neutro a sinistra;

   (e) Un'operazione binaria $\dagger$ su un insieme X si dice potenza-associativa se $(x \dagger x) \dagger x = x \dagger (x \dagger x)$, $\forall x \in X$. Dimostrare che un'operazione associativa è potenza-associativa.

   (f) Provare che $*$ non è potenza-associativa;